

ЛЮДМИЛА ИВАНОВНА СКРИПКА

МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ

От простого
к сложному

9 КЛАСС

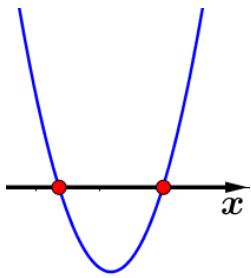
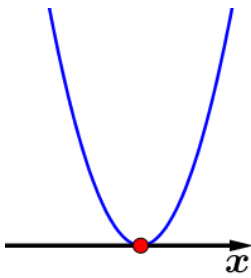
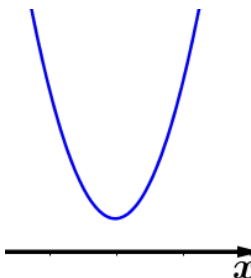
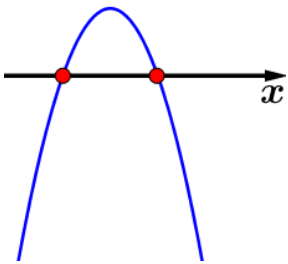
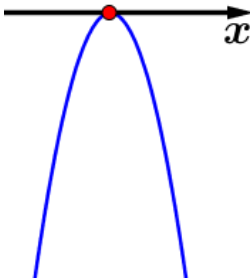
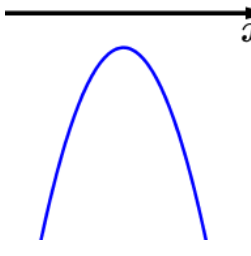
СОДЕРЖАНИЕ

Квадратные неравенства.....	2
Рациональные неравенства.....	7
Контрольная работа(I вариант с решениями).....	14
Примеры для самостоятельного решения.....	17
Квадратные неравенства.....	17
Рациональные неравенства	19
Контрольная работа.....	19
Вариант I	19
Вариант II.....	20

Квадратные неравенства.

Определение. Квадратное неравенство-это неравенство вида $ax^2 + bx + c \vee 0$, где a, b, c -числа ($a \neq 0$), x – переменная, $\vee$ один из знаков $>, \geq, <, \leq$.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ – квадратичная функция, график-парабола

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

1 $5x^2 + 9x - 2 < 0$

1) Введем функцию $f(x) = 5x^2 + 9x - 2$

Функция – квадратичная

График – парабола

Ветви – вверх

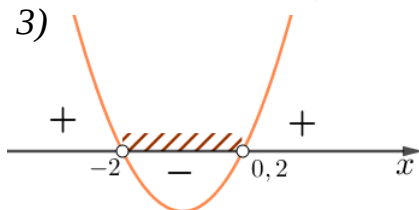
2) Найдем нули функции

$$f(x) = 0; \quad 5x^2 + 9x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 2 \cdot 5 \cdot 4}}{10} = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{10} = \frac{-9 \pm 11}{10}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ x = 0,2 \end{cases}$$

3)



$$x \in (-2; 0,2)$$

Ответ: $(-2; 0,2)$



2 $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$

1) Введем функцию $f(x) = 9x^2 - 6x + 1$

Функция – квадратичная

График – парабола

Ветви – вверх

2) Найдем нули функции

$$f(x) = 0; \quad 9x^2 - 6x + 1 = 0$$

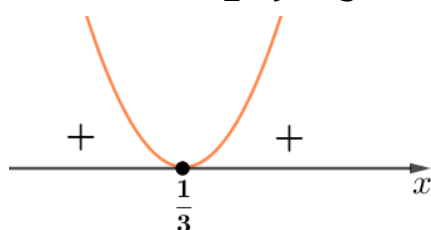
$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 36 - 36 = 0$$

$$x = \frac{6}{2 \cdot 9} = \frac{1}{3}$$

*Не заметили, что
многочлен сворачивается в
полный квадрат?*

*И теперь не заметили?
Если $D = 0$, то 1 корень, и
значит $(x - x_1)^2 = 0$*

3)



$$f(x) \leq 0 \text{ при } x = \frac{1}{3}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$

Это неравенство можно было бы решить так:

$$9x^2 - 6x + 1 \leq 0$$

$$(3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2 \leq 0$$

$$(3x - 1)^2 \leq 0$$

$$(3x - 1)^2 = 0$$

$$3x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$

3 $-3x^2 + 2x + 2 \geq 0$

$$3x^2 - 2x - 2 \leq 0$$

*Умножим обе части неравенства на (-1),
чтобы ветви параболы были вверх. Знак
неравенства меняем на противоположный.*

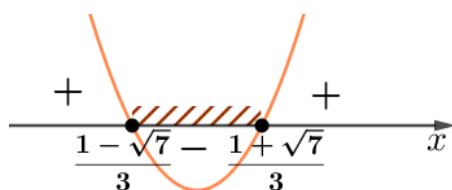
1) $f(x) = 3x^2 - 2x - 2$;

2) $f(x) = 0; \quad 3x^2 - 2x - 2 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+6}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$$



3)



$$x \in \left[\frac{1 - \sqrt{7}}{3}; \frac{1 + \sqrt{7}}{3} \right]$$

Ответ: $\left[\frac{1 - \sqrt{7}}{3}; \frac{1 + \sqrt{7}}{3} \right]$

4

Дана функция $f(x) = x^2 + x + 1$

При каких значениях x : а) $f(x) > 0$; б) $f(x) < 0$

1) Функция – квадратичная

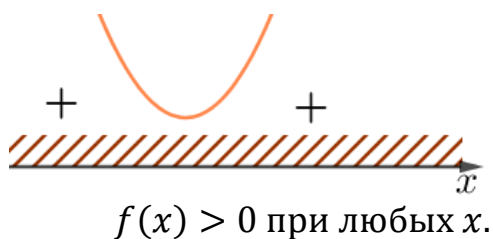
График – парабола

Ветви – вверх

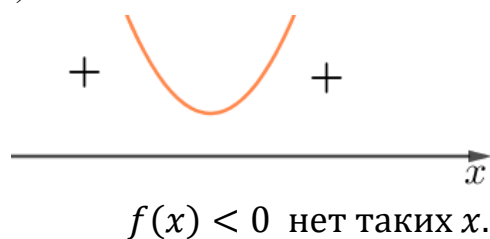
2) $f(x) = 0$; $x^2 + x + 1 = 0$

$$D = 1^2 - 4 = -3; D < 0, \text{ корней нет.}$$

а)



б)



Ответ: а) $(-\infty; +\infty)$

б) нет решений.

5

$$x^2 > 9$$

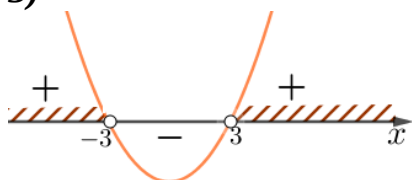
$$x^2 - 9 > 0$$

Вот в таких простых неравенствах, как ни странно, очень часто ошибаются

1) $f(x) = x^2 - 9$;

2) $f(x) = 0$; $x^2 - 9 = 0$
 $x^2 = 9$
 $x = \pm 3$

3)



$$x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

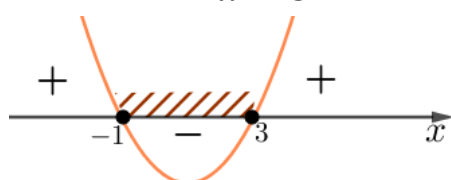
6 $(x + 1)(x - 3) \leq 0$

1) $f(x) = (x + 1)(x - 3)$

2) $f(x) = 0; (x + 1)(x - 3) = 0$

$$\begin{cases} x + 1 = 0 \\ x - 3 = 0 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

3)



$$x \in [-1; 3]$$

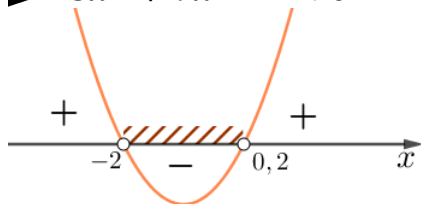
Ответ: $[-1; 3]$

Раскрывать скобки необязательно. Если мы начнём делать это устно, то сразу поймем, что функция квадратичная, и парабола ветвями вверх!

Когда этот алгоритм решения квадратного неравенства детьми усвоен, можно показать более короткую запись, и другие способы решения.

Коротко.

7 $5x^2 + 9x - 2 < 0$



$$x \in (-2; 0,2)$$

Ответ: $(-2; 0,2)$

$$\begin{aligned} D &= 9^2 + 4 \cdot 5 \cdot 2 = 81 + 40 = 121 \\ x &= \frac{-9 \pm 11}{10} \\ \begin{cases} x = -2 \\ x = 0,2 \end{cases} \end{aligned}$$

8 $x^2 \geq 4$

I способ (исследовать знак произведения)

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$(x - 2)(x + 2) \geq 0$$

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - 2 \leq 0 \\ x + 2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq -2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \leq 2 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

$$x \geq 2 \quad \text{или} \quad x \leq -2$$

$$x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$

II способ (Обе части неравенства неотрицательные, значит можно воспользоваться свойством

$$a \geq b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} \geq \sqrt{b}.$$

$$x^2 \geq 4$$

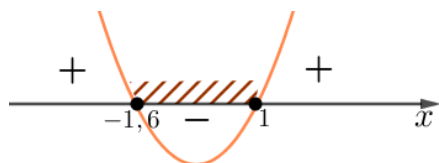
$$\sqrt{x^2} \geq \sqrt{4}$$

$$|x| \geq 2$$



$$x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$$

9 $5x^2 + 3x - 8 \leq 0$



$$x \in [-1,6; 1]$$

Ответ: $[-1,6; 1]$

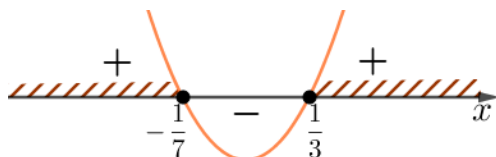
$$5x^2 + 3x - 8 = 0$$

т.к. $5+3-8=0$, то

$$x_1 = 1, \quad \text{тогда } x_2 = -\frac{8}{5} = -1,6$$

10 $(7x + 1)(3x - 1) \geq 0$

$$-\frac{1}{7}; \frac{1}{3}$$



$$x \in \left(-\infty; -\frac{1}{7}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{7}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$

1.1

$$9(x+4)^2 - 81 > 0$$

$$9(x+4)^2 > 81$$

$$(x+4)^2 > 9$$

$$|x+4| > 3$$



$$\begin{cases} x+4 > 3 \\ x+4 < -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1 \\ x < -7 \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -7) \cup (-1; +\infty)$

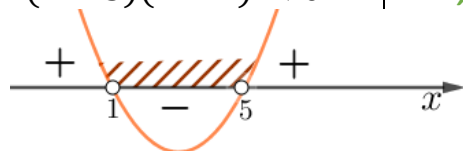
1.2

$$7(x-3)^2 - 28 < 0$$

$$(x-3)^2 - 4 < 0$$

$$(x-3-2)(x-3+2) < 0$$

$$(x-5)(x-1) < 0 \quad | \quad \text{1;5}$$



$$x \in (1; 5)$$

Ответ: $(1; 5)$

1.3

$$9(2x+7)^2 + 11 > 0$$

$$(2x+7)^2 \geq 0; \quad \text{для любых значений } x \in R$$

$$9(2x+7)^2 \geq 0$$

$$9(2x+7)^2 + 11 > 0; \quad \text{для любых значений } x \in R$$

Ответ: $(-\infty; +\infty)$

1.4

$$7(3x+1)^2 + 5 \leq 0$$

$$7(3x+1)^2 \leq -5$$

Нет решений, т. к. неотрицательное число не может быть меньше или равно отрицательному.

Ответ: нет решений.

Рациональные неравенства.

Определение. Рациональное неравенство – это неравенство вида $f(x) \vee 0$, где $f(x)$ - рациональная функция.

Метод интервалов(метод промежутков) заключается в том, что мы ищем точки смены знака функции (это нули функции и точки, в которых функция не существует) Эти точки разбивают всю числовую прямую на промежутки, в которых функция $f(x)$ сохраняет один знак. Расставляем эти знаки и выбираем промежутки с нужным нам знаком.

Алгоритм.

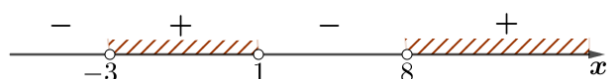
1. Введем функцию $f(x)$.
2. Найдем область определения $D(f)$.
3. Найдем нули функции, т.е. решим уравнение $f(x) = 0$.
4. На оси x показываем точки, найденные в п.2 и п.3.
5. Ставим знак функции $f(x)$ на каждом промежутке.
6. Выбираем промежутки с нужным нам знаком.

Пример 1. $(x + 3)(x - 1)(x - 8) > 0$

Введем функцию $f(x) = (x + 3)(x - 1)(x - 8)$

$D(f) = R$

$$f(x) = 0; \quad (x + 3)(x - 1)(x - 8) = 0; \quad \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 8 \end{cases}$$



$$x \in (-3; 1) \cup (8; +\infty).$$

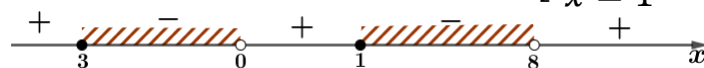
Ответ: $(-3; 1) \cup (8; +\infty)$.

Пример 2. $\frac{(x + 3)(x - 1)}{x(x - 8)} \leq 0$

$$f(x) = \frac{(x + 3)(x - 1)}{x(x - 8)}$$

$$D(f) : x(x - 8) \neq 0; \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 8 \end{cases}$$

$$f(x) = 0; \quad (x + 3)(x - 1) = 0; \quad \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$



$$x \in [-3; 0) \cup [1; 8).$$

Ответ: $[-3; 0) \cup [1; 8)$.

$$A \cdot B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

$$A \cdot B \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \neq 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$$



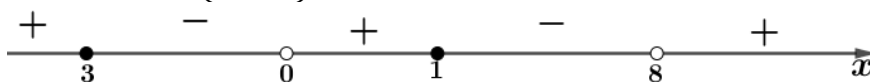
Как расставить знаки?

I способ.

Из каждого промежутка выбрать число и посчитать значение функции в этой точке.

Например

$$f(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{x(x-8)}$$



Начинаем с **правого крайнего** промежутка

$$f(9) = \frac{(9+3)(9-1)}{9(9-8)} > 0$$

$$f(5) = \frac{(5+3)(5-1)}{5(5-8)} < 0$$

$$f(0,5) = \frac{(0,5+3)(0,5-1)}{0,5(0,5-8)} > 0$$

$$f(-2) = \frac{(-2+3)(-2-1)}{-2(-2-8)} < 0$$

$$f(-10) = \frac{(-10+3)(-10-1)}{-10(-10-8)} > 0$$

Долго? Да.

Утомительно? Да.

Но на первых порах так поработать полезно всем, а потом можно оставить только тем ученикам, кто не усвоит «правило знаков»

Очень распространенная ошибка считать, что знаки всегда чередуются. Нет, не всегда.

II способ.

Правило знаков.

1. Знак правого крайнего промежутка совпадает со знаком старшего коэффициента $f(x)$.
2. При переходе (всегда справа налево) через корень *нечётной* кратности функция свой знак *меняет*.

При переходе через корень *чётной* кратности, функция свой знак *не меняет*.

Пример 3.

$$\frac{(x+5)^3(5x-18)^2}{x^6(x-2)^5} \leq 0$$

$$\text{Введём функцию } f(x) = \frac{(x+5)^3(5x-18)^2}{x^6(x-2)^5}$$

$$D(f) : x^6(x-2)^5 \neq 0; \quad \begin{cases} x^6 \neq 0 \\ (x-2)^5 \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$f(x) = 0; (x + 5)^3(5x - 18)^2 = 0; \begin{cases} (x + 5)^3 = 0 \\ (5x - 18)^2 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = -5 \\ x = 3,6 \end{cases}$$

Знак старшего коэффициента $\oplus$, т.к. если мы представим, что начнем раскрывать скобки, то в числителе будет $x^3 \cdot 25x^2 = +25x^5$, а в знаменателе $x^6 \cdot x^5 = +x^{11}$. И в числителе $\oplus$ и в знаменателе $\oplus$. Значит общий $\oplus$.

Или, просто взять число из правого крайнего промежутка и просчитать.

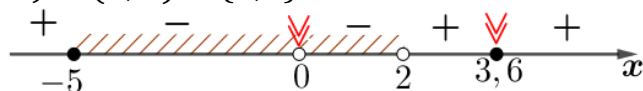
Или преобразовать функцию $f(x)$ так, чтобы каждая скобка начиналась с x , тогда правый крайний знак будет всегда $\oplus$.

Здесь -5 и 2 корни нечётной кратности

0 и 3,6 корни чётной кратности

(их можно пометить каким-нибудь значком, например $\forall$)

$$x \in [-5; 0) \cup (0; 2) \cup \{3,6\}.$$



Внимание! Не забыть отдельно стоящую точку! Она входит в решение!

Ответ: $[-5; 0) \cup (0; 2) \cup \{3,6\}$.

Пример 4.

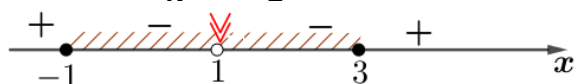
$$\begin{aligned} \frac{4}{(x-1)^2} &\geq 1 \\ \frac{4 - (x-1)^2}{(x-1)^2} &\geq 0 \\ \frac{(2-x+1)(2+x-1)}{(x-1)^2} &\geq 0 \\ \frac{(3-x)(1+x)}{(x-1)^2} &\geq 0 \\ \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2} &\leq 0 \end{aligned}$$

Умножим на (-1) обе части неравенства, тогда правый крайний промежуток будет иметь знак +

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$$

$$D(f) : x \neq 1$$

$$f(x) = 0; \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$



$$x \in [-1; 1) \cup (1; 3]$$

Ответ: $[-1; 1) \cup (1; 3]$



Пример 5.

$$\frac{3}{x^2 - 1} \leq 1$$

Решить самостоятельно!

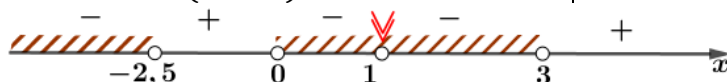
Ответ: $(-\infty; -2] \cup (-1; 1) \cup [2; +\infty)$

Пример 6.

$$\frac{4 \cdot (x - 1)^4 (2x + 5)^3}{(3 - x)^5 \cdot x} > 0$$

Прежде чем вводить функцию, разделим обе части неравенства на 4, и еще на (-1). Знак неравенства при этом меняем.

$$\frac{(x - 1)^4 (2x + 5)^3}{(x - 3)^5 \cdot x} < 0 \quad \left| \begin{array}{l} 1; -2,5 \\ 3; 0 \end{array} \right.$$



$$x \in (-\infty; -2,5) \cup (0; 1) \cup (1; 3)$$

Ответ: $(-\infty; -2,5) \cup (0; 1) \cup (1; 3)$.

Как видите, запись становится всё более короткой. Если дети могут устно найти точки смены знака функции, то можно их просто записать рядом с неравенством.

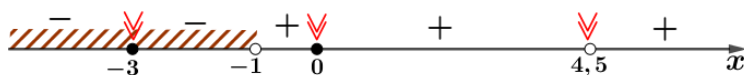
Пример 7.

$$\frac{18x^6(-3 - x)^2}{(2x - 9)^4(1 + x)} \leq 0$$

Разделим обе части неравенства на 18, заменим $(-3 - x)^2$ на $(x + 3)^2$, при этом знак неравенства не меняется.

$$\frac{x^6(x + 3)^2}{(2x - 9)^4(x + 1)} \leq 0 \quad \left| \begin{array}{l} 0; -3 \\ 4,5; -1 \end{array} \right.$$

Через точку -3 проскочили «транзитом»



$$x \in (-\infty; -1) \cup \{0\}$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup \{0\}$.

Пример 8.

$$\frac{x^2 + 2,5|x| - 18}{1,5x - 6} > 1$$

Раскроем модуль по определению

$|x| = x$, если $x \geq 0$

$|x| = -x$, если $x < 0$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{x^2 + 2,5x - 18}{1,5x - 6} - 1 > 0 \end{cases}$$

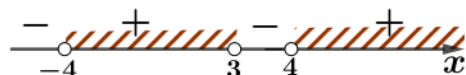
или

$$\begin{cases} x < 0 \\ \frac{x^2 - 2,5x + 18}{1,5x - 6} - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{x^2 + x - 12}{1,5(x - 4)} > 0 \mid \cdot 1,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{(x - 3)(x + 4)}{x - 4} > 0 \end{cases}$$

0
3;-4
4



$$x \in [0; 3) \cup (4; +\infty)$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ \frac{x^2 - 4x - 12}{1,5(x - 4)} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ \frac{(x - 6)(x + 2)}{x - 4} > 0 \end{cases}$$

0
6;-2
4



$$x \in (-2; 0)$$

Объединим полученные решения: $x \in (-2; 3) \cup (4; +\infty)$

Ответ: $(-2; 3) \cup (4; +\infty)$.

Пример 9.

$$\frac{x^2 - 4,5|x| - 3}{5 - 2,5x} \leq 1.$$

Решить самостоятельно!

Ответ: $[-8; 2) \cup [4; +\infty)$.

Пример 10.

$$\frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 3)}{x^2 + x - 12} \leq 0.$$

1) $x^2 + 2x + 3 > 0$ для любого $x \in R$, т.к. $D < 0$ и ветви параболы направлены вверх, поэтому обе части неравенства можно разделить на положительное число $x^2 + 2x + 3$

$$2) x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4)$$

$$3) \frac{x - 2}{(x - 3)(x + 4)} \leq 0.$$

2
3;-4



$$x \in (-\infty; -4) \cup [2; 3).$$

Ответ: $(-\infty; -4) \cup [2; 3)$.

Пример 11.

$$\frac{x^2 - 7x + 10}{(x + 3)(x^2 - 3x + 10)} \geq 0.$$

Решить самостоятельно!

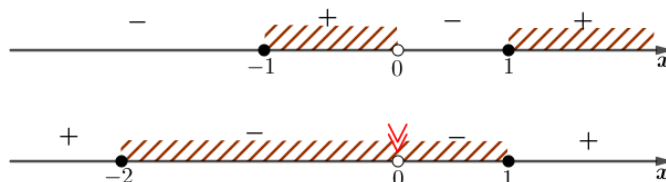
Ответ: $(-3; 2] \cup [5; +\infty)$.

Пример 12.

$$\begin{cases} \frac{1}{x} \leq x \\ \frac{2-x}{x^2} \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1-x^2}{x} \leq 0 \\ \frac{2-x-x^2}{x^2} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2-1}{x} \geq 0 \\ \frac{x^2+x-2}{x^2} \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(x-1)(x+1)}{x} \geq 0 \\ \frac{(x-1)(x+2)}{x^2} \leq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 1;-1 \\ 0 \\ 1;-2 \\ 0 \end{array}$$



$x \in [-1; 0) \cup \{1\}$. **Не забыть** отдельно стоящую точку!

Ответ: $[-1; 0) \cup \{1\}$.

Пример 13.

$$\begin{cases} \frac{12}{x} < 1-x \\ \frac{5-x}{5+2x} \geq 2 \end{cases}$$

Решить систему самостоятельно!

Ответ: $(-2,5; -1]$

Пример 14.

$$\begin{cases} \frac{x|x| - 1}{2-x} > 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x < 0 \\ \frac{x \cdot (-x) - 1}{2-x} > 0 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

$\begin{cases} x < 0 \\ x \leq 3 \end{cases}$
Меньше
меньшего!

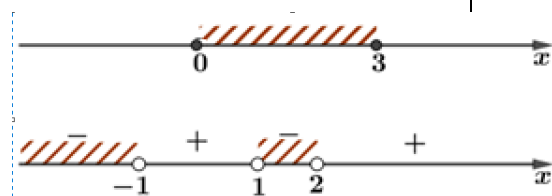
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{x \cdot x - 1}{2-x} > 0 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{(x-1)(x+1)}{x-2} < 0 \end{cases}$$

$\begin{array}{l} 0;3 \\ 1;-1 \\ 2 \end{array}$

$$\begin{cases} x < 0 \\ \frac{x^2 + 1}{x-2} > 0 \end{cases}$$

$x^2 + 1 > 0$
для любого $x \in \mathbb{R}$



$x \in (1; 2)$

$$\begin{cases} x < 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} x < 0 \\ x > 2 \end{cases}$ нет решений.

Ответ: $(1; 2)$

Пример 15. Решить систему самостоятельно

$$\begin{cases} x^2 - 4|x| \leq 0 \\ \frac{5-x}{1+x} > 0 \end{cases}$$

Ответ: $(-1; 4] \cup (5; +\infty)$.

Пример 16. Для функции $y = f(x)$, без построения графика, указать:

1. Область определения функции.
2. Нули функции.
3. Точки смены знака функции.
4. Промежутки знакопостоянства.

	$f(x) = \frac{x^2 - 4}{3}$	$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2}$	$f(x) = \frac{3}{x^2 - 4}$	$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 4}$
1.	$\mathbb{R}$	$x \neq 0$	$x \neq \pm 2$	$x \neq \pm 2$
2.	$x = \pm 2$	$x = \pm 2$	нет	$x=0$
3.	± 2	$\pm 2; 0$	± 2	$\pm 2; 0$
4.				
$f(x) > 0$				
$f(x) < 0$				

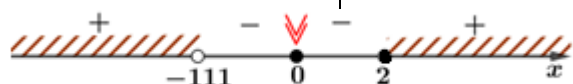
Пример 17. Найти область определения функции

а)

$$f(x) = \sqrt{\frac{|x| \cdot (x - 2)}{x + 111}}$$

$$\frac{|x| \cdot (x - 2)}{x + 111} \geq 0$$

0;2
-111



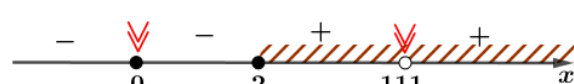
$$D(f) = (-\infty; -111) \cup \{0\} \cup [2; +\infty)$$

б)

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 \cdot (x - 2)}{|x - 111|}}$$

$$\frac{x^2 \cdot (x - 2)}{|x - 111|} \geq 0$$

0;2
111



$$D(f) = \{0\} \cup [2; 111) \cup (111; +\infty)$$

Ответ: а) $(-\infty; -111) \cup \{0\} \cup [2; +\infty)$

б) $\{0\} \cup [2; 111) \cup (111; +\infty)$

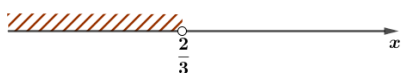
*Контрольная работа по теме
«Решение рациональных неравенств методом интервалов».
9класс (углубленный уровень), 2 урока*

Вариант I

1 Найти область определения функции

$$y = \sqrt{x^2 - 6x - 7} - \frac{1}{\sqrt{2 - 3x}}$$

$$D(y): \begin{cases} x^2 - 6x - 7 \geq 0 \\ 2 - 3x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x - 7)(x + 1) \geq 0 \\ x < \frac{2}{3} \end{cases} \quad \begin{matrix} 7; -1 \\ \frac{2}{3} \end{matrix}$$



$$x \in (-\infty; -1]$$

Ответ: $(-\infty; -1]$.

2 Решить неравенство:

$$a) \frac{2}{x} + \frac{3}{1-x} \geq -2$$

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{1-x} + 2 \geq 0$$

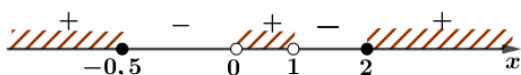
$$\frac{2 - 2x + 3x + 2x - 2x^2}{x(1-x)} \geq 0$$

$$\frac{-2x^2 + 3x + 2}{x(1-x)} \geq 0$$

$$\frac{2x^2 - 3x - 2}{x(x-1)} \geq 0$$

$$\frac{2(x-2)(x+0,5)}{x(x-1)} \geq 0$$

$$\left| \begin{matrix} 2; -0,5 \\ 0; 1 \end{matrix} \right.$$



$$x \in (-\infty; -0,5] \cup (0; 1) \cup [2; +\infty)$$

$$6) (x-3)(13-4x-x^2) < (x-3)(x^2+11x-4)$$

$$(x-3)(13-4x-x^2-x^2-11x+4) < 0$$

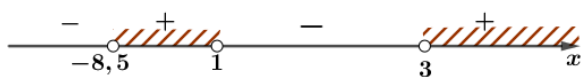
$$(x-3)(-2x^2-15x+17) < 0$$

$$(x-3)(2x^2+15x-17) > 0$$

$$(x-3) \cdot 2 \cdot (x-1) \cdot \left(x + \frac{17}{2}\right) > 0$$

$$(x-3)(x-1)(x+8,5) > 0$$

$$\left| \begin{array}{l} 2x^2 + 15x - 17 = 0 \\ 2 + 15 - 17 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{17}{2} \end{cases} \end{array} \right.$$



$$x \in (-8,5; 1) \cup (3; +\infty).$$

Ответ: а) $(-\infty; -0,5] \cup (0; 1) \cup [2; +\infty)$.

б) $(-8,5; 1) \cup (3; +\infty)$.

3 Дана функция $f(x) = (x - 3)(x + 1)^2 \cdot x^3$

Найти значения x , при которых:

а) $f(x) < 0$

б) $f(x) \leq 0$

в) $f(x) > 0$

г) $f(x) \geq 0$

а) $x \in (0; 3)$

б) $x \in \{-1\} \cup [0; 3]$

в) $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (3; +\infty)$

г) $x \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$

Ответ: а) $(0; 3)$

б) $\{-1\} \cup [0; 3]$

в) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (3; +\infty)$

г) $(-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$

4 Решить неравенство

$$\frac{3 - 3|x| + 2x^2}{x^2 + 1} \geq 1$$

$$\frac{2x^2 - 3|x| + 3 - x^2 - 1}{x^2 + 1} \geq 0$$

$$\frac{x^2 - 3|x| + 2}{x^2 + 1} \geq 0$$

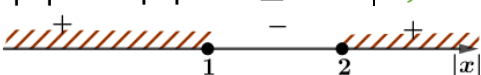
$$x^2 - 3|x| + 2 \geq 0$$

$$|x|^2 - 3|x| + 2 \geq 0$$

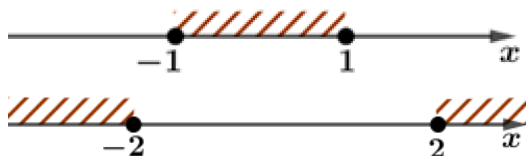
$$x^2 + 1 > 0, \text{ для любого } x \in \mathbb{R}$$

$$|x|^2 = x^2$$

$$1; 2$$



$$\begin{cases} |x| \leq 1 \\ |x| \geq 2 \end{cases}$$



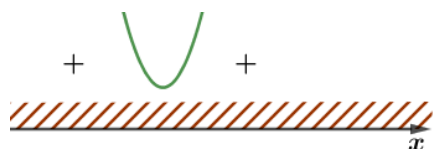
$$x \in (-\infty; -2] \cup [-1; 1] \cup [2; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [-1; 1] \cup [2; +\infty)$

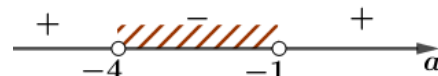
5 При каких значениях a неравенство выполняется при всех действительных значениях x ?

$$x^2 + (2a + 4)x - a \geq 0.$$

Графиком функции $f(x) = x^2 + (2a + 4)x - a$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Неравенство будет выполняться при всех действительных x , если $D < 0$. Найдем $\frac{D}{4} = (a + 2)^2 + a = a^2 + 5a + 4$



$$\begin{aligned} a^2 + 5a + 4 &< 0 \\ (a + 1)(a + 4) &< 0 \\ a &\in (-4; -1) \end{aligned}$$



Ответ: $(-4; -1)$

6 * Указать все значения a , при которых система неравенств не имеет решений

$$\begin{cases} ax^2 - 2x + 5 > 0 & (1) \\ x > 3 & (2) \end{cases}$$

1. Если $a = 0$, то $\begin{cases} -2x + 5 > 0 \\ x > 3 \end{cases} \begin{cases} x < 2,5 \\ x > 3 \end{cases}$ нет решений, значит $a = 0$ подходит по условию задачи.

2. Если $a > 0$, то возможны три случая:

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
решения (1)			
решения (2)			

Во всех трёх случаях, куда бы мы не поставили число 3, решения у системы обязательно будут, а значит при $a > 0$ условие задачи не выполняется.

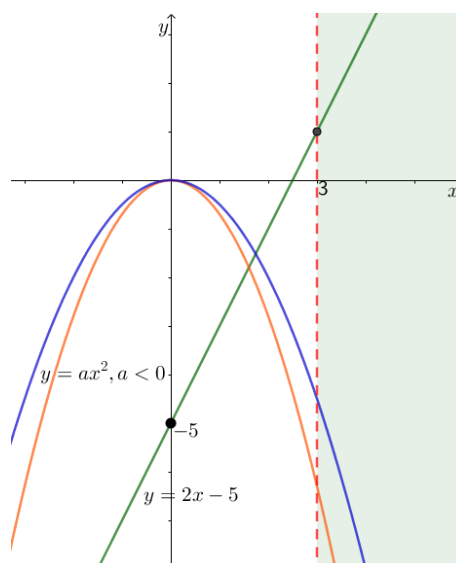
3. Если $a < 0$, то ветви параболы вниз, перепишем систему в таком виде:

$$\begin{cases} ax^2 > 2x - 5 \\ x > 3 \end{cases}$$

Парабола будет выше прямой при $x < 2,5$, значит при $a < 0$ условие задачи выполняется.

Объединим полученные решения:

при $a \in (-\infty; 0]$ данная система не имеет решений.



Ответ: $(-\infty; 0]$.

Квадратные неравенства.

1. $5x^2 + 9x - 2 < 0$

2. $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$

3. $-3x^2 + 2x + 2 \geq 0$

4. Дана функция $f(x) = x^2 + x + 1$

При каких значения x : а) $f(x) > 0$; б) $f(x) < 0$

5. $x^2 > 9$

6. $(x + 1)(x - 3) \leq 0$

7. $5x^2 + 9x - 2 < 0$

8. $x^2 \geq 4$

9. $5x^2 + 3x - 8 \leq 0$

10. $(7x + 1)(3x - 1) \geq 0$

11. $9(x + 4)^2 - 81 > 0$

12. $7(x - 3)^2 - 28 < 0$

13. $9(2x + 7)^2 + 11 > 0$

14. $7(3x + 1)^2 + 5 \leq 0$

Рациональные неравенства.

1. $(x+3)(x-1)(x-8) > 0$

2. $\frac{(x+3)(x-1)}{x(x-8)} \leq 0$

3. $\frac{(x+5)^3(5x-18)^2}{x^6(x-2)^5} \leq 0$

4. $\frac{4}{(x-1)^2} \geq 1$

5. $\frac{3}{x^2-1} \leq 1$

6. $\frac{4 \cdot (x-1)^4(2x+5)^3}{(3-x)^5 \cdot x} > 0$

7. $\frac{18x^6(-3-x)^2}{(2x-9)^4(1+x)} \leq 0$

8. $\frac{x^2+2,5|x|-18}{1,5x-6} > 1$

9. $\frac{x^2-4,5|x|-3}{5-2,5x} \leq 1.$

10. $\frac{(x-2)(x^2+2x+3)}{x^2+x-12} \leq 0.$

11. $\frac{x^2-7x+10}{(x+3)(x^2-3x+10)} \geq 0.$

12. $\begin{cases} \frac{1}{x} \leq x \\ \frac{2-x}{x^2} \geq 1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \frac{12}{x} < 1-x \\ \frac{5-x}{5+2x} \geq 2 \end{cases}$

14. $\begin{cases} \frac{x|x|-1}{2-x} > 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} \frac{x^2-4|x|}{5-x} \leq 0 \\ 1+x > 0 \end{cases}$

16. Для функции $y = f(x)$, без построения графика, указать:

1. Область определения функции.
2. Нули функции.
3. Точки смены знака функции.
4. Промежутки знакопостоянства.

	$f(x) = \frac{x^2-4}{3}$	$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2}$	$f(x) = \frac{3}{x^2-4}$	$f(x) = \frac{3x^2}{x^2-4}$
5.				
6.				
7.				
8.				
$f(x) > 0$				
$f(x) < 0$				

5.

17. Найти область определения функции

a) $f(x) = \sqrt{\frac{|x| \cdot (x-2)}{x+111}}$

б) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 \cdot (x-2)}{|x-111|}}$

*Контрольная работа по теме
«Решение рациональных неравенств методом интервалов».
9класс (углубленный уровень), 2 урока*

Вариант I

1 Найти область определения функции $y = \sqrt{x^2 - 6x - 7} - \frac{1}{\sqrt{2-3x}}$

2 Решить неравенство:

а) $\frac{2}{x} + \frac{3}{1-x} \geq -2$

б) $(x-3)(13-4x-x^2) < (x-3)(x^2+11x-4)$

3 Дана функция $f(x) = (x-3)(x+1)^2 \cdot x^3$

Найти значения x , при которых:

а) $f(x) < 0$

б) $f(x) \leq 0$

в) $f(x) > 0$

г) $f(x) \geq 0$

4 Решить неравенство

$$\frac{3 - 3|x| + 2x^2}{x^2 + 1} \geq 1$$

5 При каких значениях a неравенство $x^2 + (2a+4)x - a \geq 0$ выполняется при всех действительных значениях x ?

6 * Указать все значения a , при которых система неравенств не имеет решений

$$\begin{cases} ax^2 - 2x + 5 > 0 \\ x > 3 \end{cases}$$

Вариант II. Решить самостоятельно.

1 Найти область определения функции $y = \sqrt{12+x-x^2} - \frac{1}{\sqrt{2|x|-5}}$

2 Решить неравенство:

а) $\frac{1}{x} \geq \frac{x+1}{1-x} - 1$ б) $\frac{4-x}{x+2} \leq \frac{12-3x}{x-3}$

3 Дана функция $f(x) = (3x-1)^4(x+2)^3 \cdot (x^2-6x)^2$

Найти значения x , при которых:

а) $f(x) < 0$

б) $f(x) \leq 0$

в) $f(x) > 0$

г) $f(x) \geq 0$

4 Решить неравенство

$$\frac{2x^2 - 5x - 5 \cdot |x-3| + 17}{x^2 + x + 2} \leq 1$$

5 Решить неравенство для каждого действительного значения a .

$$x^2 - ax + 1 > 0.$$

6 * Указать все значения a , при которых система неравенств не имеет решений

$$\begin{cases} ax^2 - 4x + 3 > 0 \\ x \geq |x-2| + 2 \end{cases}$$

$$6) (x-3)(13-4x-x^2) < (x-3)(x^2+11x-4)$$

$$(x-3)(13-4x-x^2) < (x-3)(x^2+11x-4) < 0$$

$$(x-3)(-2x^2-15x+17) < 0$$

$$(x-3)(2x^2+15x-17) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{17}{2} \end{cases}$$

$$2x^2+15x-17=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{17}{2} \end{cases}$$

$$x \in (-\infty; -8.5; 1) \cup (3; +\infty)$$

Ответ: $x \in (-\infty; -8.5; 1) \cup (3; +\infty)$

Дана функция $f(x) = (x-3)(x+1)^2 \cdot x^3$

Найти значения x , при которых:

а) $f(x) < 0$

б) $f(x) \leq 0$

в) $f(x) > 0$

г) $f(x) \geq 0$



Ответ: а) $(0; 3)$

б) $\{-1\} \cup [0; 3]$

в) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (3; +\infty)$

г) $(-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$

Решить неравенство

$$3 - 3|x| + 2x^2 \geq 1$$

$$2x^2 - 3|x| + 2 \geq 0$$

$$x^2 - 3|x| + 2 \geq 0$$

$$x^2 - 3|x| + 2 \geq 0$$

$$x^2 - 3|x| + 2 \geq 0$$

$$|x|^2 - 3|x| + 2 \geq 0$$

$$x^2 - 3|x| + 2 \geq 0$$

$$x^2 - 3|x| + 2 \geq 0$$

$$x^2 - 3|x| + 2 \geq 0$$

Дана функция $f(x) = x^2 + x + 1$
 При каких значениях x : а) $f(x) > 0$; б) $f(x) < 0$
 1) Функция – квадратичная
 График – парабола
 Ветви – вверх
 $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$
 $x^2 + x + 1 = 0$
 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$