

Людмила Ивановна Скрипка

ЗАДАНИЕ №15

МАТЕМАТИКА

ЕГЭ

Рукописный вариант

≥ 0

$+2x+7$

≥ 0

параметры $a^{f(x)} - a^{g(x)}$

со знаком выражения

$(f(x) - g(x))$ при условиях

$\frac{(x^2+2x-20+x^2-2x-7)}{(2-1)(2x-3)} \geq 0$

$3x^2 - 24 < 0$

СОДЕРЖАНИЕ

§1. Задание №15.1. Замена переменной. Метод интервалов.....	2
Решения.....	3
Задание №15.1. Ответы.	15
Задание №15.1(ДЗ) Замена переменной. Метод интервалов.	16
Задание №15.1(ДЗ). Ответы.	17
§2. Задание №15.2. Действия с логарифмами, потенцирование. Действия со степенями, логарифмирование.....	18
Решения.....	19
Задание №15.2. Ответы.	32
Задание №15.2 (ДЗ) Действия с логарифмами, потенцирование. Действия со степенями, логарифмирование.....	33
Задание №15.2 (ДЗ). Ответы.	34
§3. Задание №15.3. Смешанные неравенства. Переменное основание.....	36
Решения.....	37
Задание №15.3. Ответы.	35
Задание №15.3 (ДЗ). Смешанные неравенства. Переменное основание	50
Задание №15.3 (ДЗ). Ответы.	50

Задание №15.1. Замена переменной. Метод интервалов.

1) $\log_2^2(16 + 6x - x^2) + 10 \log_{0,5}(16 + 6x - x^2) + 24 > 0.$ (ЕГЭ-2015)

2) $\frac{2}{3^x - 9} \geq \frac{8}{3^x - 3}.$ (ЕГЭ-2015)

3) $\frac{\log_2(4x^2) + 35}{\log_2^2 x - 36} \geq -1.$ (ЕГЭ-2017)

4) $\frac{9^x + 2 \cdot 3^x - 117}{3^x - 27} \leq 1.$ (ЕГЭ-2019)

5) $\frac{49^x - 6 \cdot 7^x + 3}{7^x - 5} + \frac{6 \cdot 7^x - 39}{7^x - 7} \leq 7^x + 5.$ (ЕГЭ-2016)

6) $\frac{\log_5(25x)}{\log_5 x - 2} + \frac{\log_5 x - 2}{\log_5(25x)} \geq \frac{6 - \log_5 x^4}{\log_5^2 x - 4}.$ (ЕГЭ-2017)

7) $\frac{9^{x+\frac{1}{2}} - 4 \cdot 3^x + 5}{9^{x+\frac{1}{2}} - 4 \cdot 3^x + 1} + \frac{5 \cdot 3^x - 19}{3^x - 4} \leq \frac{2 \cdot 3^{x+2} - 12}{3^{x+1} - 1}.$ (ЕГЭ-2016)

8) $\frac{2^{x+5} - 2^{-x}}{2^{3-x} - 4^{-x}} \geq 2^x.$ (ЕГЭ-2019)

9) $\log_2^2(25 - x^2) - 7 \log_2(25 - x^2) + 12 \geq 0.$ (ЕГЭ-2017)

10) $\lg^4 x - 4 \lg^3 x + 5 \lg^2 x - 2 \lg x \geq 0.$ (ЕГЭ-2015)

11) $(\log_2^2 x - 2 \log_2 x)^2 < 11 \log_2^2 x - 22 \log_2 x - 24.$ (ЕГЭ-2015)

12) $\frac{105}{(2^{4-x^2} - 1)^2} - \frac{22}{2^{4-x^2} - 1} + 1 \geq 0.$ (ЕГЭ-2015)

15.1. Замена переменной. Метод интервалов.

1) ЕГЭ - 2015

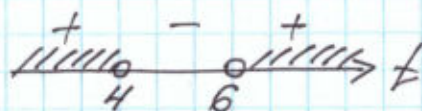
$$\log_2^2(16+6x-x^2) + 10 \log_5(16+6x-x^2) + 24 > 0.$$

$$\log_2^2(16+6x-x^2) - 10 \log_2(16+6x-x^2) + 24 > 0$$

Пусть $\log_2(16+6x-x^2) = t$, тогда

$$t^2 - 10t + 24 > 0$$

$$(t-4)(t-6) > 0$$



$$\begin{cases} t < 4 \\ t > 6 \end{cases}$$

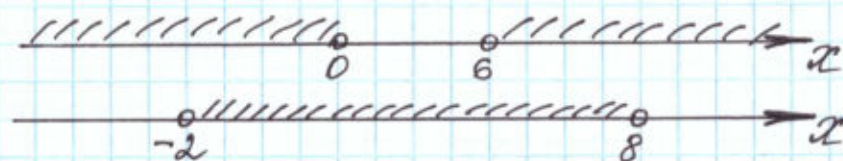
$$\begin{cases} \log_2(16+6x-x^2) < \log_2 2^4 \\ \log_2(16+6x-x^2) > \log_2 2^6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < 16+6x-x^2 < 16 \\ 16+6x-x^2 > 64 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 6x > 0 \\ x^2 - 6x - 16 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 48 < 0, \text{ нет решений, т.к. } \Delta < 0 \end{cases} \bigcup_x$$

$$\begin{cases} x(x-6) > 0 & | \quad 0; 6 \\ (x+2)(x-8) < 0 & | \quad -2; 8. \end{cases}$$



$$x \in (-2; 0) \cup (6; 8)$$

Ответ: $(-2; 0) \cup (6; 8)$

15.1. Замена переменной. Метод интервалов.

2) ЕГЭ - 2015

$$\frac{2}{3^x - 9} \geq \frac{8}{3^x - 3}$$

Пусть $3^x - 3 = t$, тогда

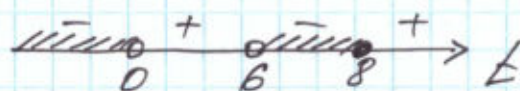
$$\frac{2}{t-6} \geq \frac{8}{t}$$

$$\frac{1}{t-6} - \frac{4}{t} \geq 0$$

$$\frac{t - 4t + 24}{t(t-6)} \geq 0$$

$$\frac{-3t + 24}{t(t-6)} \geq 0$$

$$\frac{t-8}{t(t-6)} \leq 0 \quad | \quad 0; 6$$



$$\begin{cases} t < 0 \\ 6 < t \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^x - 3 < 0 \\ 6 < 3^x - 3 \leq 8 \end{cases} \begin{cases} 3^x < 3^1 \\ 3^2 < 3^x \leq 3^{\log_3 11} \end{cases} \begin{cases} x < 1 \\ 2 < x \leq \log_3 11 \end{cases}$$

Функция $y = 3^x$ возрастающая на $\mathbb{R}$.

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (2; \log_3 11]$

15.1. Замена переменной. Метод интервалов.

3) $\frac{\log_2(4x^2) + 35}{\log_2^2 x - 36} \geq -1$ ЕГЭ-2017

$$\frac{\log_2 4 + \log_2 x^2 + 35}{(\log_2 x - 6)(\log_2 x + 6)} + 1 \geq 0$$

$$\frac{2 \log_2 x + 37 + \log_2^2 x - 36}{(\log_2 x - 6)(\log_2 x + 6)} \geq 0$$

$$\frac{\log_2^2 x + 2 \log_2 x + 1}{(\log_2 x - 6)(\log_2 x + 6)} \geq 0$$

$$\frac{(\log_2 x + 1)^2}{(\log_2 x - 6)(\log_2 x + 6)} \geq 0$$



$$\begin{cases} \log_2 x < -6 \\ \log_2 x = -1 \\ \log_2 x > 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2 x < \log_2 2^{-6} \\ \log_2 x = \log_2 2^{-1} \\ \log_2 x > \log_2 2^6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{64} \\ x = \frac{1}{2} \\ x > 64 \end{cases}$$

Функция $y = \log_2 x$
возрастающая на $(0; +\infty)$.

$$x \in (0; \frac{1}{64}) \cup \{\frac{1}{2}\} \cup (64; +\infty)$$

Ответ: $(0; \frac{1}{64}) \cup \{\frac{1}{2}\} \cup (64; +\infty)$

15.1. Замена переменной. Метод интервалов.

4) ЕГЭ-2019

$$\frac{9^x + 2 \cdot 3^x - 117}{3^x - 27} \leq 1$$

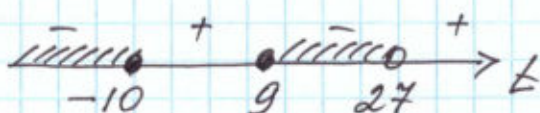
$$\frac{9^x + 2 \cdot 3^x - 117 - 3^x + 27}{3^x - 27} \leq 0$$

$$\frac{(3^x)^2 + 3^x - 90}{3^x - 27} \leq 0$$

Пусть $3^x = t$.

$$\frac{t^2 + t - 90}{t - 27} \leq 0$$

$$\frac{(t+10)(t-9)}{t-27} \leq 0$$



$$\begin{cases} t \leq -10 \\ 9 \leq t < 27 \end{cases} \quad \begin{cases} 3^x \leq -10 \text{ нет решений} \\ 3^2 \leq 3^x < 3^3 \end{cases}$$

$2 \leq x < 3$, т.к. функция $y = 3^x$ возрастает на $\mathbb{R}$.

Ответ: $[2; 3)$

15.1. Замена переменной. Метод интервалов.

5) ЕГЭ - 2016

$$\frac{49^x - 6 \cdot 7^x + 3}{4^x - 5} + \frac{6 \cdot 7^x - 39}{4^x - 7} \leq 7^x + 5.$$

Пусть $7^x = t$, тогда

$$(*) \quad \frac{t^2 - 6t + 3}{t - 5} + \frac{6t - 39}{t - 7} - t - 5 \leq 0$$

$$\frac{(t^2 - 6t + 3)(t - 7) + (6t - 39)(t - 5) - t(t^2 - 12t + 35) - 5(t^2 - 12t + 35)}{(t - 5)(t - 7)} \leq 0$$

$$\frac{t^3 - 6t^2 + 3t - 7t^2 + 42t - 21 + 6t^2 - 69t + 195 - t^3 + 12t^2 - 35t - 5t^2 + 60t - 175}{(t - 5)(t - 7)} \leq 0$$

$$\frac{t - 1}{(t - 5)(t - 7)} \leq 0 \quad \text{штрихи} \quad \begin{array}{c} + \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} + \\ 5 \end{array} \quad \begin{array}{c} + \\ 7 \end{array} \rightarrow t$$

$$\left[\begin{array}{l} t \leq 1 \\ 5 < t < 7 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 7^x \leq 1 \\ 5 < 7^x < 7 \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} 7^x \leq 7^0 \\ 7^{\log_7 5} < 7^x < 7^1 \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x \leq 0 \\ \log_7 5 < x < 1 \end{array} \right.$$

Функция $y = 7^x$ возрастающая на $\mathbb{R}$
 $x \in (-\infty; 0] \cup (\log_7 5; 1)$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup (\log_7 5; 1)$

$$(*) \quad \frac{t^2 - 6t + 3}{t - 5} + \frac{6t - 39}{t - 7} - t - 5 \leq 0$$

$$\frac{t(t - 5) + 3 - t}{t - 5} + \frac{6(t - 7) + 3}{t - 7} - t - 5 \leq 0$$

$$t + \frac{3 - t}{t - 5} + 6 + \frac{3}{t - 7} - t - 5 \leq 0$$

$$\frac{3 - t}{t - 5} + \frac{3}{t - 7} + 1 \leq 0$$

$$\frac{(3 - t)(t - 7) + 3(t - 5) + (t - 5)(t - 7)}{(t - 5)(t - 7)} \leq 0$$

$$\frac{3t - t^2 - 21 + 7t + 3t - 15 + t^2 - 5t - 7t + 35}{(t - 5)(t - 7)} \leq 0; \quad \frac{t - 1}{(t - 5)(t - 7)} \leq 0.$$

15.1. Замена переменной. Метод интервалов.

6) ЕГЭ-2014

$$\frac{\log_5(25x)}{\log_5 x - 2} + \frac{\log_5 x - 2}{\log_5(25x)} \geq \frac{6 - \log_5 x^4}{\log_5^2 x - 4}$$

$$\frac{\log_5 x + 2}{\log_5 x - 2} + \frac{\log_5 x - 2}{\log_5 x + 2} \geq \frac{6 - 4\log_5 x}{(\log_5 x - 2)(\log_5 x + 2)}$$

Пусть $\log_5 x = t$, тогда

$$\frac{t+2}{t-2} + \frac{t-2}{t+2} \geq \frac{6-4t}{(t-2)(t+2)}$$

$$\frac{(t+2)^2 + (t-2)^2 - 6 + 4t}{(t-2)(t+2)} \geq 0$$

$$\frac{t^2 + 4t + 4 + t^2 - 4t + 4 - 6 + 4t}{(t-2)(t+2)} \geq 0$$

$$\frac{2t^2 + 4t + 2}{(t-2)(t+2)} \geq 0$$

$$\frac{(t+1)^2}{(t-2)(t+2)} \geq 0$$

число $- \vee -$ $+$
 $-2 \quad -1 \quad 2 \quad t$

$$\begin{cases} t < -2 \\ t = -1 \\ t > 2 \end{cases} \begin{cases} \log_5 x < \log_5 5^{-2} \\ \log_5 x = \log_5 5^{-1} \\ \log_5 x > \log_5 5^2 \end{cases} \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{25} \\ x = \frac{1}{5} \\ x > 25 \end{cases}$$

Функция $y = \log_5 x$ возрастающая на $(0; +\infty)$
 $x \in (0; \frac{1}{25}) \cup \{\frac{1}{5}\} \cup (25; +\infty)$

Ответ: $(0; \frac{1}{25}) \cup \{\frac{1}{5}\} \cup (25; +\infty)$

15.1. Замена переменной. Метод интервалов.

8) ЕГЭ - 2019

$$\frac{2^{x+5} - 2^{-x}}{2^{3-x} - 4^{-x}} \geq 2^x$$

$$\frac{32 \cdot 2^x - 2^{-x}}{8 \cdot 2^{-x} - (2^{-x})^2} - 2^x \geq 0 \quad \text{Пусть } 2^x = t, \text{ где } t > 0.$$

$$\frac{32t - \frac{1}{t}}{\frac{8}{t} - \frac{1}{t^2}} - t \geq 0$$

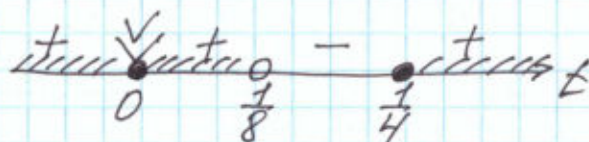
$$\frac{32t^2 - 1}{t} : \frac{8t - 1}{t^2} - t \geq 0$$

$$\frac{(32t^2 - 1)t}{8t - 1} - t \geq 0$$

$$\frac{32t^3 - t - 8t^2 + t}{8t - 1} \geq 0$$

$$\frac{8t^2(4t - 1)}{8t - 1} \geq 0$$

$$\frac{t^2(t - \frac{1}{4})}{t - \frac{1}{8}} \geq 0$$



$$\begin{cases} t < \frac{1}{8} \\ t \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^x < 2^{-3} \\ 2^x \geq 2^{-2} \end{cases} \quad \begin{cases} x < -3 \\ x \geq -2 \end{cases} \quad x \in (-\infty; -3) \cup [-2; +\infty)$$

Функция $y = 2^x$ возрастающая на $\mathbb{R}$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup [-2; +\infty)$

15.1. Замена переменной. Метод интервалов.

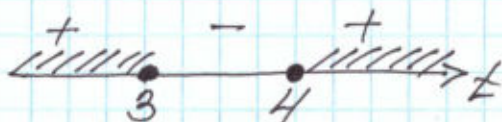
9) ЕГЭ - 2017

$$\log_2^2(25-x^2) - 7\log_2(25-x^2) + 12 > 0$$

Пусть $\log_2(25-x^2) = t$, тогда

$$t^2 - 7t + 12 > 0$$

$$(t-3)(t-4) > 0$$



$$[\begin{array}{l} t \leq 3 \\ t \geq 4 \end{array}$$

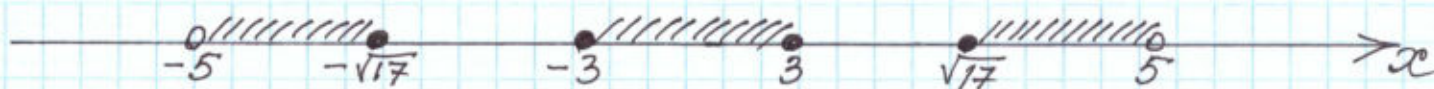
$$]$$

$$\left[\begin{array}{l} \log_2(25-x^2) \leq \log_2 2^3 \\ \log_2(25-x^2) \geq \log_2 2^4 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 0 < 25-x^2 \leq 8 \\ 25-x^2 \geq 16 \end{array} \right.$$

Функция $y = \log_2 t$
возрастающая на $(0; +\infty)$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 25-x^2 > 0 \\ 25-x^2 \leq 8 \\ 25-x^2 \geq 16 \end{cases} \left[\begin{array}{l} 17 \leq x^2 < 25 \\ x^2 \leq 9 \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} \sqrt{17} \leq |x| < 5 \\ |x| \leq 3 \end{array} \right. \end{array} \right.$$



$$x \in (-5; -\sqrt{17}] \cup [-3; 3] \cup [\sqrt{17}; 5)$$

Ответ: $(-5; -\sqrt{17}] \cup [-3; 3] \cup [\sqrt{17}; 5)$

15.1. Замена переменной. Метод интервалов.

10) ЕГЭ - 2015

$$\lg^4 x - 4\lg^3 x + 5\lg^2 x - 2\lg x \geq 0.$$

Пусть $\lg x = t$, тогда

$$t^4 - 4t^3 + 5t^2 - 2t \geq 0$$

$$t(t^3 - 4t^2 + 5t - 2) \geq 0$$

$$t(t-1)^2(t-2) \geq 0$$



$$\begin{cases} t \leq 0 \\ t = 1 \\ t \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg x \leq \lg 1 \\ \lg x = \lg 10 \\ \lg x \geq \lg 100 \end{cases}$$

Функция $y = \lg x$ возрастает на $(0; +\infty)$

$$\begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ x = 10 \\ x \geq 100 \end{cases} \quad x \in (0; 1] \cup \{10\} \cup [100; +\infty)$$

Ответ: $(0; 1] \cup \{10\} \cup [100; +\infty)$

$$1) t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = 0$$

$t=1$ корень, т.к.

$$1 - 4 + 5 - 2 = 0 \text{ верно}$$

$$2) \begin{array}{r|l} t^3 - 4t^2 + 5t - 2 & t-1 \\ \underline{-(t^3 - t^2)} & \\ -3t^2 + 5t - 2 & \\ \underline{-(-3t^2 + 3t)} & \\ -2t - 2 & \\ \underline{-(-2t - 2)} & \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} t-1 \\ t^2 - 3t + 2 \end{array}$$

$$3) t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

15.1. Замена переменной. Метод интервалов.

11) ЕГЭ-2015

$$(\log_2^2 x - 2 \log_2 x)^2 < 11 \log_2^2 x - 22 \log_2 x - 24.$$

$$(\log_2^2 x - 2 \log_2 x)^2 < 11(\log_2^2 x - 2 \log_2 x) - 24.$$

Пусть $\log_2^2 x - 2 \log_2 x = t$, тогда

$$t^2 < 11t - 24$$

$$t^2 - 11t + 24 < 0$$

$$(t-3)(t-8) < 0$$

$$3 < t < 8$$

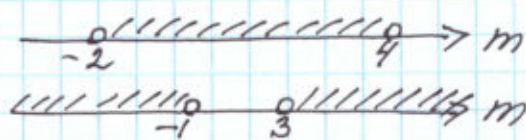


$$\begin{cases} \log_2^2 x - 2 \log_2 x < 8 \\ \log_2^2 x - 2 \log_2 x > 3 \end{cases}$$

Пусть $\log_2 x = m$

$$\begin{cases} m^2 - 2m - 8 < 0 \\ m^2 - 2m - 3 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2; 4 \\ -1; 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m+2)(m-4) < 0 \\ (m+1)(m-3) > 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} -2 < m < 4 \\ 3 < m < 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2 2^{-2} < \log_2 x < \log_2 2^{-1} \\ \log_2 2^3 < \log_2 x < \log_2 2^4 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Функция } y = \log_2 x \\ \text{возрастает на } (0; +\infty), \end{array} \right\}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2} \\ 8 < x < 16 \end{cases} \quad x \in \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup (8; 16)$$

Ответ: $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup (8; 16)$

15.1. Замена переменной. Метод интервалов.

12) ЕГЭ - 2015

$$\frac{105}{(2^{4x^2-1})^2} - \frac{22}{2^{4x^2-1}} + 1 \geq 0.$$

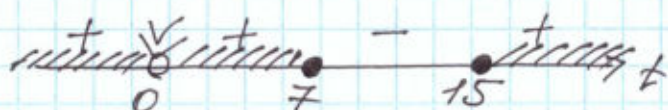
Пусть $2^{4x^2-1} = t$, тогда

$$\frac{105}{t^2} - \frac{22}{t} + 1 \geq 0$$

$$\frac{105 - 22t + t^2}{t^2} \geq 0$$

$$\frac{t^2 - 22t + 105}{t^2} \geq 0$$

$$\frac{(t-15)(t-7)}{t^2} \geq 0 \quad \left| \begin{array}{l} 7; 15 \\ 0 \end{array} \right.$$

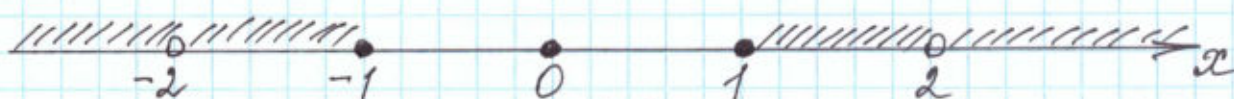


$$\left[\begin{array}{l} t < 0 \\ 0 < t \leq 7 \\ t \geq 15 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2^{4x^2-1} < 0 \\ 0 < 2^{4x^2-1} \leq 7 \\ 2^{4x^2-1} \geq 15 \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} 2^{4x^2} < 2^0 \\ 2^0 < 2^{4x^2} \leq 2^3 \\ 2^{4x^2} \geq 2^4 \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} 4x^2 < 0 \\ 0 < 4x^2 \leq 3 \\ 4x^2 \geq 4 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 > 4 \\ 1 \leq x^2 < 4 \\ x^2 \leq 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} |x| > 2 \\ 1 \leq |x| < 2 \\ |x| = 0 \end{array} \right.$$

Функция $y = 2^m$
возрастающая
на $\mathbb{R}$.



$$x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1] \cup \{0\} \cup [1; 2) \cup (2; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-2; -1] \cup \{0\} \cup [1; 2) \cup (2; +\infty)$

Задание №15.1. Ответы.

1) $(-2; 0); (6; 8)$.

2) $(-\infty; 1); (2; \log_3 11]$.

3) $\left(0; \frac{1}{64}\right); \frac{1}{2}; (64; +\infty)$.

4) $[2; 3)$.

5) $(-\infty; 0]; (\log_7 5; 1)$.

6) $(0; 0,04); 0,2; (25; +\infty)$.

7) $(-\infty; -1); (-1; 0); [1; \log_3 4)$.

8) $(-\infty; -3); [-2; +\infty)$.

9) $(-5; -\sqrt{17}]; [-3; 3]; [\sqrt{17}; 5)$.

10) $(0; 1]; 10; [100; +\infty)$.

11) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right); (8; 16)$.

12) $(-\infty; -2); (-2; -1]; 0; [1; 2); (2; +\infty)$.

Задание №15.1 (ДЗ). Замена переменной. Метод интервалов.

1) $9^{4x-x^2-1} - 36 \cdot 3^{4x-x^2-1} + 243 \geq 0.$ (ЕГЭ-2017)

2) $\frac{3 \lg^2 x - 8}{\lg^2 x - 4} \geq 2.$ (ЕГЭ-2015)

3) $\frac{31 - 5 \cdot 2^x}{4^x - 24 \cdot 2^x + 128} \geq 0,25.$ (ЕГЭ-2015)

4) $\frac{2 \log_3(9x) - 13}{\log_3^2 x - \log_3 x^4} \leq 1.$ (ЕГЭ-2017)

5) $\frac{4^x - 2^{x+3} + 7}{4^x - 5 \cdot 2^x + 4} \leq \frac{2^x - 9}{2^x - 4} + \frac{1}{2^x - 6}.$ (ЕГЭ-2016)

6) $\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{\log_4(64x)} \geq \frac{\log_4 x^4 + 16}{\log_4^2 x - 9}.$ (ЕГЭ-2017)

7) $\frac{9^x - 3^{x+1} - 19}{3^x - 6} + \frac{9^{x+1} - 3^{x+4} + 2}{3^x - 9} \leq 10 \cdot 3^x + 3.$ (ЕГЭ-2016)

8) $\frac{3^x - 80 \cdot 3^{-x} - 27}{9^{-x} - 3^{3-x}} \leq 3^x.$

9) $2 \log_4^2(20 - x^2) - 7 \log_4(20 - x^2) + 6 \geq 0.$

10) $3^{4x+1} - 31 \cdot 27^x + 37 \cdot 9^x - 3^{x+2} \leq 0.$

11) $(9^x - 2 \cdot 3^x)^2 - 62(9^x - 2 \cdot 3^x) - 63 \geq 0.$ (ЕГЭ-2017)

12) $\frac{4}{(\log_2(64 - x^2) - 2)^2} - \frac{5}{\log_2\left(16 - \frac{x^2}{4}\right)} + 1 \geq 0.$

Задание №15.1 (ДЗ). Ответы.

- 1)** $(-\infty; 1]; 2; [3; +\infty)$.
- 2)** $(0; 0,01); 1; (100; +\infty)$.
- 3)** $1; (3; 4)$.
- 4)** $(0; 1); 27; (81; +\infty)$.
- 5)** $(-\infty; 0); (0; 2); (\log_2 6; 3]$.
- 6)** $\left(0; \frac{1}{64}\right); 4; (64; +\infty)$.
- 7)** $(-\infty; 1]; (\log_3 6; 2)$.
- 8)** $(-\infty; -3); [2; +\infty)$.
- 9)** $(-2\sqrt{5}; -2\sqrt{3}); [-2; 2]; [2\sqrt{3}; 2\sqrt{5})$.
- 10)** $(-\infty; -1]; [0; 2]$.
- 11)** $0; [2; +\infty)$.
- 12)** $(-8; -2\sqrt{15}); (-2\sqrt{15}; -2\sqrt{14}); 0; [2\sqrt{14}; 2\sqrt{15}); (2\sqrt{15}; 8)$.

**Задание №15.2. Действия с логарифмами, потенцирование.
Действия со степенями, логарифмирование.**

1) $2\log_2(x\sqrt{3}) - \log_2 \frac{x}{x+1} \geq \log_2 \left(3x^2 + \frac{1}{x}\right).$ (ЕГЭ-2018)

2) $\log_7(2x^2 + 12) - \log_7(x^2 - x + 12) \geq \log_7 \left(2 - \frac{1}{x}\right).$ (ЕГЭ-2018)

3) $\log_5(3x + 1) + \log_5 \left(\frac{1}{72x^2} + 1\right) \geq \log_5 \left(\frac{1}{24x} + 1\right).$ (ЕГЭ-2018)

4) $\log_2(x - 1) + \log_2 \left(x^2 + \frac{1}{x - 1}\right) \leq 2\log_2 \frac{x^2 + x - 1}{2}.$ (ЕГЭ-2018)

5) $\log_5(4 - x) + \log_5 \frac{1}{x} \leq \log_5 \left(\frac{1}{x} - x + 3\right).$ (ЕГЭ-2018)

6) $\log_4(6 - 6x) < \log_4(x^2 - 5x + 4) + \log_4(x + 3).$ (ЕГЭ-2019)

7) $\log_{|x+1|}^2(x+1)^4 + \log_2(x+1)^2 \leq 22.$

8) $-\log_{\frac{1}{3}} x^2 + 2\log_9(x+3) \geq 2\log_3(-x-1) + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}(x+6).$

9) $\log_{\sqrt[9]{8}} \left(\log_{\frac{1}{7}}(x+1)\right) \geq 3.$

10) $3^{x^2} \cdot 5^{x-1} \geq 3.$ (ЕГЭ-2018)

11) $\sqrt[3]{27^{2x-3}} > \sqrt{81^{\frac{6-4x}{x+1}}}.$

12) $5^{x+3} + 5^{x+1} + 2 \cdot 5^x < 2^{\frac{x}{4}+6} + 2^{\frac{x}{4}+1}.$

15.2 Действия с логарифмами, потенцирование.
Действия со степенями, логарифмирование.

1) ЕГЭ-2018

$$2 \log_2 (x\sqrt{3}) - \log_2 \frac{x}{x+1} \geq \log_2 (3x^2 + \frac{1}{x})$$

I. ОДЗ: $\begin{cases} x\sqrt{3} > 0 \\ \frac{x}{x+1} > 0 \\ 3x^2 + \frac{1}{x} > 0 \end{cases} \begin{cases} x > 0 \\ x+1 > 0 \\ \frac{3x^3+1}{x} > 0 \end{cases} \begin{cases} x > 0 \\ 3x^3+1 > 0 \end{cases} \quad \boxed{x > 0}$

II. $\log_2 (3x^2) \geq \log_2 \frac{x}{x+1} + \log_2 \frac{3x^3+1}{x}$

$$\log_2 (3x^2) \geq \log_2 \frac{x(3x^3+1)}{(x+1) \cdot x}$$

$$3x^2 \geq \frac{3x^3+1}{x+1}$$

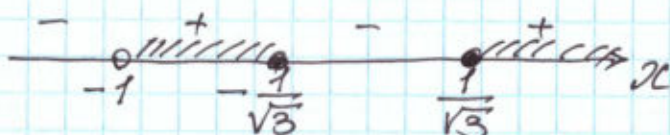
$$3x^2 - \frac{3x^3+1}{x+1} \geq 0$$

$$\frac{3x^3 + 3x^2 - 3x^3 - 1}{x+1} \geq 0$$

$$\frac{3x^2 - 1}{x+1} \geq 0$$

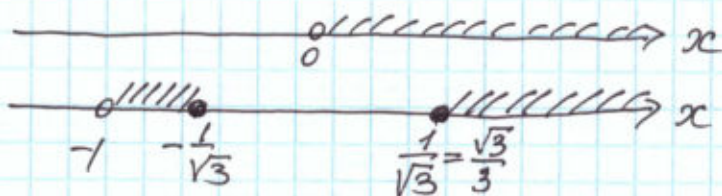
Функция $y = \log_2 t$
возрастающая
на $(0; +\infty)$

$$\begin{cases} 3x^2 - 1 = 0 \\ x^2 = \frac{1}{3} \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$



$$x \in (-1; -\frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty)$$

III. С учетом ОДЗ получаем:



$$x \in [\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

Ответ: $[\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty)$

15.2. Действия с логарифмами, потенцирование.
Действия со степенями, логарифмирование.

2) ЕГЭ-2018

$$\log_7(2x^2+12) - \log_7(x^2-x+12) \geq \log_7\left(2-\frac{1}{x}\right)$$

Заметим, что $2x^2+12 > 0$ и $x^2-x+12 > 0$
для любых действительных значений x ,
поэтому $\log_7 \frac{2x^2+12}{x^2-x+12} \geq \log_7\left(\frac{2x-1}{x}\right)$.

Функция $y = \log_7 t$ возрастающая на $(0; +\infty)$.

$$\frac{2x^2+12}{x^2-x+12} \geq \frac{2x-1}{x} > 0.$$

$$\begin{cases} \frac{2x^2+12}{x^2-x+12} - \frac{2x-1}{x} \geq 0 \\ \frac{2x-1}{x} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x^3+12x-2x^3+3x^2-25x+12}{(x^2-x+12) \cdot x} \geq 0 \\ \frac{2x-1}{x} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cdot (x^2-x+12) \\ \text{т.к. } x^2-x+12 > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

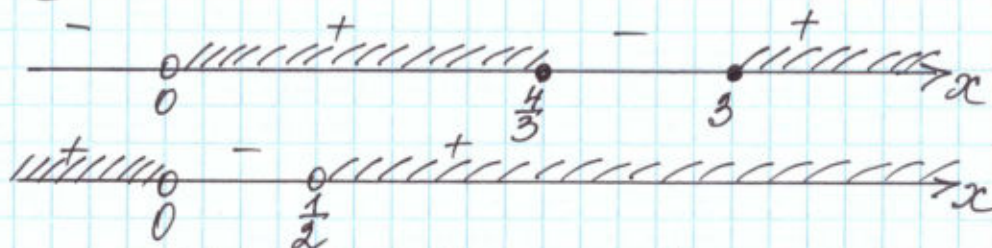
$$\begin{cases} \frac{3x^2-13x+12}{x} \geq 0 \\ \frac{2x-1}{x} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2-13x+12=0 \\ x = \frac{13 \pm \sqrt{169-144}}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3(x-3)(x-\frac{4}{3})}{x} \geq 0 \\ \frac{2(x-\frac{1}{2})}{x} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \frac{4}{3}; 3 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = \frac{13 \pm 5}{6} \\ \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases} \end{cases}$$



$$x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right] \cup [3; +\infty)$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right] \cup [3; +\infty)$

15.2. Действия с логарифмами, потенцирование.
Действия со степенями, логарифмирование.

3) ЕГЭ - 2018

$$\log_5(3x+1) + \log_5\left(\frac{1}{72x^2} + 1\right) \geq \log_5\left(\frac{1}{24x} + 1\right)$$

I. ОДЗ:
$$\begin{cases} 3x+1 > 0 \\ \frac{1}{72x^2} + 1 > 0 \\ \frac{1}{24x} + 1 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -\frac{1}{3} \\ \frac{1+72x^2}{72x^2} > 0 \\ \frac{1+24x}{24x} > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -\frac{1}{3} \\ x \neq 0 \\ \frac{x+\frac{1}{24}}{x} > 0 \end{cases}$$

$$x \in \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{24}\right) \cup (0; +\infty).$$

II.
$$\log_5 \frac{(3x+1)(1+72x^2)}{72x^2} \geq \log_5 \frac{1+24x}{24x}$$

Функция $y = \log_5 t$ возрастающая на $(0; +\infty)$

$$\frac{(3x+1)(1+72x^2)}{72x^2} \geq \frac{1+24x}{24x} \quad / \cdot 24$$

$$\frac{3x+1+216x^3+72x^2}{3x^2} - \frac{(1+24x) \cdot 3x}{x \cdot 3x} \geq 0$$

$$\frac{216x^3+72x^2+3x+1-3x-72x^2}{3x^2} \geq 0 \quad / \cdot 3$$

$$\frac{216x^3+1}{x^2} \geq 0$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ 216x^3+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x \geq -\frac{1}{6} \end{cases} \quad x \in \left[-\frac{1}{6}; 0\right) \cup (0; +\infty)$$

III. С учётом ОДЗ получим:

$$x \in \left[-\frac{1}{6}; -\frac{1}{24}\right) \cup (0; +\infty)$$

Ответ: $\left[-\frac{1}{6}; -\frac{1}{24}\right) \cup (0; +\infty)$

15.2. Действия с логарифмами, потенцирование.
Действия со степенями, логарифмирование.

4) ЕГЭ-2018

$$\log_2(x-1) + \log_2\left(x^2 + \frac{1}{x-1}\right) \leq 2 \cdot \log_2 \frac{x^2+x-1}{2}$$

I. ОДЗ: $\begin{cases} x-1 > 0 \\ x^2 + \frac{1}{x-1} > 0 \\ \frac{x^2+x-1}{2} > 0 \end{cases} \begin{cases} x > 1 \\ x^2 > -\frac{1}{x-1} \\ x^2 > -(x-1) \end{cases} \quad \boxed{x > 1}$

при $x > 1$ второе и третье неравенства выполняются.

Испособ

II. $\log_2 \frac{(x-1) \cdot (x^3 - x^2 + 1)}{x-1} \leq \log_2 \frac{(x^2+x-1)^2}{4}$

Функция $y = \log_2 t$ возрастающая на $(0; +\infty)$

$$x^3 - x^2 + 1 \leq \frac{(x^2+x-1)^2}{4}$$

$$4x^3 - 4x^2 + 4 \leq x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 - 2x - 2x^2$$

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

$$(x^4 - 2x^3 + x^2) + (2x^2 - 2x) - 3 \geq 0$$

$$(x^2 - x)^2 + 2(x^2 - x) - 3 \geq 0 \quad \text{пусть } x^2 - x = t$$

$$t^2 + 2t - 3 \geq 0$$

$$(t-1)(t+3) \geq 0$$

$$(x^2 - x - 1)(x^2 - x + 3) \geq 0$$

$$x^2 - x - 1 \geq 0$$

$$1) x^2 - x + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$2) x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$2 < \sqrt{5} < 3$$

$$3 < 1 + \sqrt{5} < 4$$

$$\frac{3}{2} < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} < 2$$

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$$

III. С учётом ОДЗ получим:

$$x \in \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; +\infty \right)$$

Ответ: $\left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; +\infty \right)$

$$\text{II способ} \quad \log_2(x-1) + \log_2\left(x^2 + \frac{1}{x-1}\right) \leq 2 \log_2 \frac{x^2 + x - 1}{2}$$

Пусть $x-1=a$, $x^2=b$, тогда

$$\log_2 a + \log_2\left(b + \frac{1}{a}\right) \leq 2 \cdot \log_2 \frac{b+a}{2}$$

$$a\left(b + \frac{1}{a}\right) \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$ab + 1 \leq \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}$$

$$4ab + 4 \leq a^2 + 2ab + b^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 - 4 \geq 0$$

$$(a-b)^2 - 2^2 \geq 0$$

$$(a-b-2)(a-b+2) \geq 0$$

$$(x-1-x^2-2)(x-1-x^2+2) \geq 0$$

$$(-x^2+x-3)(-x^2+x+1) \geq 0$$

$$(x^2-x+3)(x^2-x-1) \geq 0.$$

15.2. Действия с логарифмами, потенцирование.
Действия со степенями, логарифмирование.

5) ЕГЭ-2018

$$\log_5(4-x) + \log_5 \frac{1}{x} \leq \log_5 \left(\frac{1}{x} - x + 3 \right)$$

I. ОДЗ: $\begin{cases} 4-x > 0 \\ \frac{1}{x} > 0 \\ \frac{1}{x} - x + 3 > 0 \end{cases} \begin{cases} 0 < x < 4 \\ \frac{1-x^2+3x}{x} > 0 \end{cases} \begin{cases} 0 < x < 4 \\ x^2-3x-1 < 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 1 &= 0 \\ x &= \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} 3 < \sqrt{13} < 4 \\ 6 < 3 + \sqrt{13} < 7 \\ 3 < \frac{3 + \sqrt{13}}{2} < 3,5 \end{aligned} \right| \begin{aligned} -4 < -\sqrt{13} < -3 \\ -1 < 3 - \sqrt{13} < 0 \\ -0,5 < \frac{3 - \sqrt{13}}{2} < 0 \end{aligned}$$

$x \in \left(0; \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right)$

II. $\log_5 \frac{4-x}{x} \leq \log_5 \left(\frac{1-x^2+3x}{x} \right)$

Функция $y = \log_5 t$ возрастающая на $(0; +\infty)$.

$$\frac{4-x}{x} \leq \frac{1-x^2+3x}{x} \quad \begin{array}{l} \text{Умножим обе части} \\ \text{неравенства на } x, \text{ т.к.} \\ \text{по ОДЗ } 0 < x < \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \end{array}$$

$$4-x \leq 1-x^2+3x$$

$$x^2 - 4x + 3 \leq 0$$

$$(x-1)(x-3) \leq 0$$

$x \in [1; 3]$

III. С учётом ОДЗ получим:

$x \in [1; 3]$

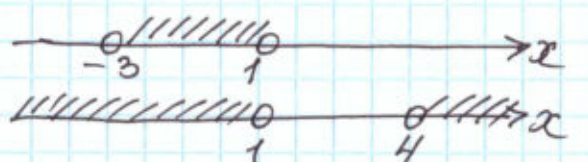
Ответ: $[1; 3]$

15.2. Действия с логарифмами, потенцирование.
Действия со степенями, логарифмирование.

6) ЕГЭ-2019

$$\log_4 (6-6x) < \log_4 (x^2-5x+4) + \log_4 (x+3)$$

I. ОДЗ:
$$\begin{cases} 6-6x > 0 \\ x^2-5x+4 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \begin{cases} x < 1 \\ (x-1)(x-4) > 0 \\ x > -3 \end{cases} \begin{cases} -3 < x < 1 \\ (x-1)(x-4) > 0 \end{cases}$$


$$x \in (-3; 1)$$

II. $\log_4 (6-6x) < \log_4 ((x-1)(x-4)(x+3))$

Функция $y = \log_4 t$ возрастает на $(0; +\infty)$

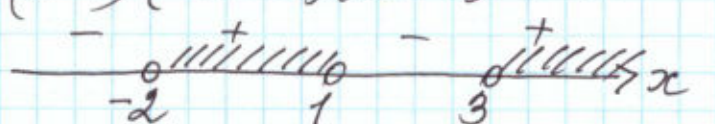
$$6(1-x) < (x-1)(x-4)(x+3)$$

$$(x-1)(x-4)(x+3) + 6(x-1) > 0$$

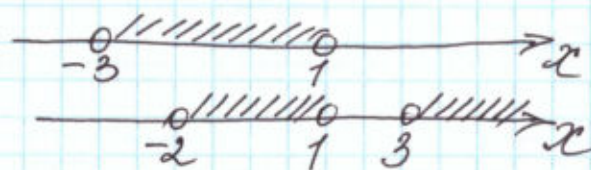
$$(x-1)(x^2-4x+3x-12+6) > 0$$

$$(x-1)(x^2-x-6) > 0$$

$$(x-1)(x+2)(x-3) > 0$$


$$x \in (-2; 1) \cup (3; +\infty)$$

III. С учётом ОДЗ получим:


$$x \in (-2; 1)$$

Ответ: $(-2; 1)$

15.2. Действия с логарифмами, потенцирование.
Действия со степенями, логарифмирование.

$$7) \log_{|x+1|}^2 (x+1)^4 + \log_2 (x+1)^2 \leq 22$$

Заметим, что $(x+1)^4 = |x+1|^4$, $(x+1)^2 = |x+1|^2$.

Пусть $|x+1| = t$, тогда

$$(\log_t t^4)^2 + \log_2 t^2 \leq 22$$

$$\begin{cases} t > 0 \\ t \neq 1 \\ 16 + \log_2 t^2 \leq 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t > 0 \\ t \neq 1 \\ 2 \log_2 t \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t > 0 \\ t \neq 1 \\ \log_2 t \leq \log_2 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t > 0 \\ t \neq 1 \\ t \leq 8 \end{cases}$$

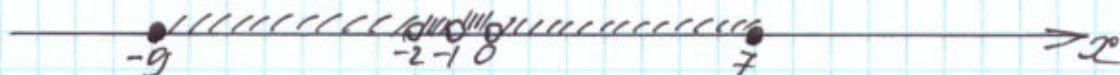
, т.к. функция $y = \log_2 t$ возрастает на $(0; +\infty)$.

$$\begin{cases} 0 < t < 1 \\ 1 < t \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < |x+1| < 1 \\ 1 < |x+1| \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x+1 < 1 \\ -1 < x+1 < 0 \\ 1 < x+1 \leq 8 \\ -8 \leq x+1 < -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 < x < 0 \\ -2 < x < -1 \\ 0 < x \leq 7 \\ -9 \leq x < -2 \end{cases}$$



Ответ: $[-9; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup [0; 7]$

15.2. Действия с логарифмами, потенцирование.
Действия со степенями, логарифмирование.

$$8) -\log_3 x^2 + 2\log_3(x+3) \geq 2\log_3(-x-1) + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}(x+6).$$

$$\text{I. ОДЗ: } \begin{cases} x^2 > 0 \\ x+3 > 0 \\ -x-1 > 0 \\ x+6 > 0 \end{cases} \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -3 \\ x < -1 \\ x > -6 \end{cases} \quad x \in (-3; -1)$$

$$\text{II. } 2\log_3|x| + \log_3(x+3) \geq 2\log_3(-x-1) + \log_3(x+6)$$

$$\log_3 x^2 + \log_3(x+3) \geq \log_3(-x-1)^2 + \log_3(x+6)$$

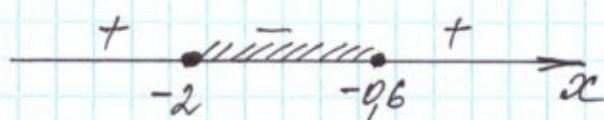
$$\log_3(x^2(x+3)) \geq \log_3((x+1)^2(x+6))$$

Функция $y = \log_3 t$ — возрастающая на $(0; +\infty)$

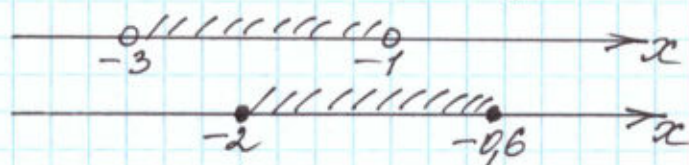
$$x^2(x+3) \geq (x^2+2x+1)(x+6)$$

$$x^3 + 3x^2 \geq x^3 + 2x^2 + x + 6x^2 + 12x + 6$$

$$5x^2 + 13x + 6 \leq 0$$



III. С учётом ОДЗ получим:



$$x \in [-2; -1)$$

Ответ: $[-2; -1)$

$$5x^2 + 13x + 6 = 0$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 120}}{10}$$

$$x = \frac{-13 \pm 7}{10}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ x = -0.6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ x = -0.6 \end{cases}$$

15.2. Действия с логарифмами, потенцирование.
Действия со степенями, логарифмирование.

$$9) \log_{\sqrt[9]{8}} (\log_{\frac{1}{7}} (x+1)) \geq 3$$

$$\log_{\sqrt[9]{8}} (\log_{\frac{1}{7}} (x+1)) \geq \log_{\sqrt[9]{8}} (\sqrt[9]{8})^3$$

Функция $y = \log_{\sqrt[9]{8}} t$ — возрастающая на $(0; +\infty)$, т.к.
 $\sqrt[9]{8} > 1$, то

$$\log_{\frac{1}{7}} (x+1) \geq ((2^3)^{\frac{1}{9}})^3$$

$$\log_{\frac{1}{7}} (x+1) \geq 2$$

$$\log_{\frac{1}{7}} (x+1) \geq \log_{\frac{1}{7}} \left(\frac{1}{7}\right)^2$$

Функция $y = \log_{\frac{1}{7}} t$ — убывающая на $(0; +\infty)$

$$0 < x+1 \leq \frac{1}{49}$$

$$-1 < x \leq -\frac{48}{49}$$

$$x \in \left(-1; -\frac{48}{49}\right]$$

Ответ: $\left(-1; -\frac{48}{49}\right]$

15.2. Действия с логарифмами, потенцирование.
Действия со степенями, логарифмирование.

10) ЕГЭ-2018

$$3^{x^2} \cdot 5^{x-1} \geq 3$$

$$\frac{3^{x^2}}{3} \geq \frac{1}{5^{x-1}}$$

$$3^{x^2-1} \geq 5^{1-x}$$

Функция $y = \log_3 t$ возрастающая на $(0; +\infty)$ и
 $3^{x^2-1} \geq 5^{1-x} > 0$, тогда

$$\log_3 3^{x^2-1} \geq \log_3 5^{1-x}$$

$$x^2-1 \geq (1-x) \log_3 5$$

$$(x-1)(x+1) + (x-1) \cdot \log_3 5 \geq 0$$

$$(x-1)(x+1+\log_3 5) \geq 0$$

$$(x-1)(x+\log_3 15) \geq 0$$



$$x \in (-\infty; -\log_3 15] \cup [1; +\infty)$$

$$\begin{aligned} \log_3 15 &> \log_3 1 \\ \log_3 15 &> 0 \\ -\log_3 15 &< 0. \end{aligned}$$

Ответ: $(-\infty; -\log_3 15] \cup [1; +\infty)$

15.2. Действия с логарифмами, потенцирование.
Действия со степенями, логарифмирование.

$$\begin{aligned} 11) \quad & \sqrt[3]{2 \cdot 2^{2x-3}} > \sqrt{81^{\frac{6-4x}{x+1}}} \\ & \sqrt[3]{(3^3)^{2x-3}} > \sqrt{(3^4)^{\frac{6-4x}{x+1}}} \\ & \sqrt[3]{(3^{2x-3})^3} > \sqrt{(3^{\frac{6-4x}{x+1}})^4} \\ & 3^{2x-3} > (3^{\frac{6-4x}{x+1}})^2 \\ & 3^{2x-3} > 3^{\frac{12-8x}{x+1}} \end{aligned}$$

Функция $y = 3^t$ возрастающая на $\mathbb{R}$

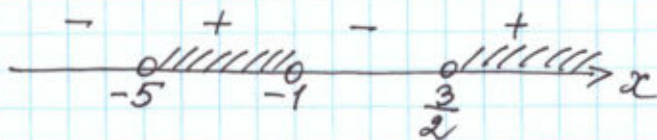
$$2x-3 > \frac{12-8x}{x+1}$$

$$\frac{(2x-3)(x+1) - (12-8x)}{x+1} > 0$$

$$\frac{2x^2 - 3x + 2x - 3 - 12 + 8x}{x+1} > 0$$

$$\frac{2x^2 + 7x - 15}{x+1} > 0$$

$$\frac{2(x+5)(x-\frac{3}{2})}{x+1} > 0$$



$$x \in (-5; -1) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$$

Ответ: $(-5; -1) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$

$$2x^2 + 7x - 15 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 120}}{4}$$

$$x = \frac{-7 \pm 13}{4}$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

15.2. Действия с логарифмами, потенцированием.
Действия со степенями, логарифмирование.

$$12) 5^{x+3} + 5^{x+1} + 2 \cdot 5^x < 2^{\frac{x}{4}+6} + 2^{\frac{x}{4}+1}$$

$$5^x(5^3 + 5^1 + 2) < 2^{\frac{x}{4}}(2^6 + 2^1)$$

$$5^x \cdot 132 < (\sqrt[4]{2})^x \cdot 66$$

$$5^x < (\sqrt[4]{2})^x \cdot \frac{1}{2}, \quad (\sqrt[4]{2})^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{5^x}{(\sqrt[4]{2})^x} < \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{5}{\sqrt[4]{2}}\right)^x < \left(\frac{5}{\sqrt[4]{2}}\right)^{\log_{\frac{5}{\sqrt[4]{2}}} \frac{1}{2}}$$

$$x < \log_{\frac{5}{\sqrt[4]{2}}} \frac{1}{2}$$

функция $y = \left(\frac{5}{\sqrt[4]{2}}\right)^x$
возрастающая на $\mathbb{R}$,
т.к. $\frac{5}{\sqrt[4]{2}} > 1$

$$x < -\log_{\frac{5}{\sqrt[4]{2}}} 2$$

$$x < -\frac{\ln 2}{\ln 5 - \ln \sqrt[4]{2}}$$

$$x < -\frac{\ln 2}{\ln 5 - \frac{1}{4}\ln 2}$$

$$x < -\frac{4\ln 2}{4\ln 5 - \ln 2}$$

Можно записать так:

$$\log_{\frac{5}{\sqrt[4]{2}}} \frac{1}{2} = \frac{\lg \frac{1}{2}}{\lg \frac{5}{\sqrt[4]{2}}} =$$

$$= \frac{-\lg 2}{\lg 5 - \lg \sqrt[4]{2}}$$

Ответ: $(-\infty; -\frac{4\ln 2}{4\ln 5 - \ln 2})$

Задание №15.2. Ответы.

1) $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right).$

2) $\left(\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right]; [3; +\infty).$

3) $\left[-\frac{1}{6}; -\frac{1}{24}\right); (0; +\infty).$

4) $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right).$

5) $[1; 3].$

6) $(-2; 1).$

7) $[-9; -2); (-2; -1); (-1; 0); (0; 7].$

8) $[-2; -1).$

9) $\left(-1; -\frac{48}{49}\right].$

10) $(-\infty; -\log_3 15]; [1; +\infty).$

11) $(-5; -1); \left(\frac{3}{2}; +\infty\right).$

12) $\left(-\infty; -\frac{\lg 2}{\lg 5 - \lg \sqrt[4]{2}}\right).$

**Задание №15.2 (ДЗ). Действия с логарифмами, потенцирование.
Действия со степенями, логарифмирование.**

1) $2\log_2(1-2x) - \log_2\left(\frac{1}{x} - 2\right) \leq \log_2(4x^2 + 6x - 1).$ (ЕГЭ-2018)

2) $\log_2(x-1) + \log_2\left(2x + \frac{4}{x-1}\right) \geq 2\log_2\frac{3x-1}{2}.$ (ЕГЭ-2018)

3) $\log_5(3x^2 - 2) - \log_5 x < \log_5\left(3x^2 + \frac{1}{x} - 3\right).$ (ЕГЭ-2018)

4) $2\log_2 x + \log_2\left(x + \frac{1}{x^2}\right) \leq 2\log_2\frac{x^2 + x}{2}.$ (ЕГЭ-2018)

5) $\log_2\left(\frac{1}{x} - 1\right) + \log_2\left(\frac{1}{x} + 1\right) \leq \log_2(27x - 1).$ (ЕГЭ-2018)

6) $\log_2(x-1)(x^2+2) \leq 1 + \log_2(x^2+3x-4) - \log_2 x.$ (ЕГЭ-2019)

7) $\log_{|x|}^2(x^2) + \log_2(x^2) \leq 8.$

8) $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{7}} x^2 - \log_{\frac{1}{7}}(x+2) \leq 2\log_7(1-x) + 2\log_{49}(x+10).$

9) $\log_{\sqrt[4]{36}}\left(\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\right) \geq 2.$

10) $8 \cdot 7^{2x+1} \leq 16^{1-x^2}.$

11) $\sqrt[4]{625^{\frac{4-2x}{x-1}}} > \sqrt[3]{125^{2x+1}}.$

12) $3^{x+3} + 3^{x+2} - 3^x < 2^{\frac{x}{2}} + 2^{\frac{x}{2}-1} + 2^{\frac{x}{2}-2}.$

Задание №15.2 (ДЗ). Ответы.

1) $\left[\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right).$

2) $(1; 3].$

3) $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}; 1\right); (1; +\infty).$

4) $[2; +\infty).$

5) $\left[\frac{1}{3}; 1\right).$

6) $(1; 2].$

7) $[-4; -1); (-1; 0); (0; 1); (1; 4].$

8) $(-2; 0); \left(0; \frac{2}{3}\right].$

9) $\left(-1; -\frac{63}{64}\right].$

10) $\left[\frac{1 - \log_2 7}{2}; -\frac{1}{2}\right].$

11) $(-\infty; -3); \left(1; \frac{3}{2}\right).$

12) $\left(-\infty; -\frac{\lg 20}{\lg 3 - \lg \sqrt{2}}\right).$

Задание №15.3. Ответы.

1) $[0; 2); (2; 5)$.

2) $(-\infty; -3]; (1, 5; 3]$.

3) $(2, 5; 2, 6]; (3; +\infty)$.

4) $(-\infty; -2]; -1; [3; +\infty)$.

5) $(-6; -5); [3; 3, 5); (5; 5, 5]$.

6) $(-0, 5; 0]; (2; 3)$.

7) $\left[-\frac{3}{4}; 0\right); (2; +\infty)$.

8) $\left[\frac{2}{3}; 1\right); (1; 2); (2; +\infty)$.

9) $(4; 8]$.

10) $(-1; 4]$.

Задание №15.3. Смешанные неравенства. Переменное основание.

1) $\frac{6^x - 4 \cdot 3^x}{x \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x - 4x + 20} \leq \frac{1}{x - 5}. \quad (\text{ЕГЭ-2018})$

2) $\frac{25^{x^2+x-10} - (0,2)^{x^2-2x-7}}{0,5 \cdot 4^{x-1} - 1} \leq 0. \quad (\text{ЕГЭ-2019})$

3) $(5x - 13) \cdot \log_{2x-5}(x^2 - 6x + 10) \geq 0. \quad (\text{ЕГЭ-2016})$

4) $\left(4^{x^2-x-6} - 1\right) \cdot \log_{0,25}\left(4^{x^2+2x+2} - 3\right) \leq 0. \quad (\text{ЕГЭ-2016})$

5) $\frac{\log_2(2x^2 - 17x + 35) - 1}{\log_7(x + 6)} \leq 0. \quad (\text{ЕГЭ-2017})$

6) $\log_{3-x}(2x + 1) \cdot \log_{3x+4}(4 - x) \leq 0.$

7) $\log_{1-\frac{1}{(x-1)^2}}\left(\frac{x^2 + 5x + 8}{x^2 - 3x + 2}\right) \leq 0.$

8) $\log_{\frac{x}{2}}(x^2 - 2x + 1) \geq 2.$

9) $\log_{x^3-9x^2+27x-27}(9-x) \geq 0.$

10) $\log_{5-x} \frac{x+2}{(x-5)^4} \geq -4.$

15.3. Сложные неравенства.
Переменное основание.

1) ЕГЭ-2018

$$\frac{6^x - 4 \cdot 3^x}{x \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x - 4x + 20} \leq \frac{1}{x-5}$$

$$\frac{3^x(2^x - 4)}{2^x(x-5) - 4(x-5)} - \frac{1}{x-5} \leq 0$$

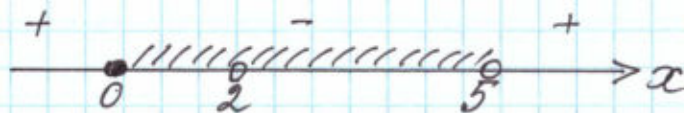
$$\frac{3^x(2^x - 4)}{(x-5)(2^x - 4)} - \frac{1}{x-5} \leq 0$$

$$\begin{cases} 2^x - 4 \neq 0 \\ \frac{3^x - 1}{x-5} \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^x \neq 2^2 \\ \frac{3^x - 3^0}{x-5} \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 2 \\ \frac{x}{x-5} \leq 0 \end{cases}$$

Знак выражения $a^{f(x)} - a^{g(x)}$
совпадает со знаком
выражения $(a-1) \cdot (f(x) - g(x))$,
при условиях $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1. \end{cases}$



$$x \in [0; 2) \cup (2; 5)$$

Ответ: $[0; 2) \cup (2; 5)$.

15.3. Смешанные неравенства.
Переменное основание.

2) ЕГЭ-2019

$$\frac{25^{x^2+x-10} - (0,2)^{x^2-2x-7}}{0,5 \cdot 4^{x-1} - 1} \leq 0$$

$$\frac{5^{-2x^2+2x-20} - 5^{-x^2+2x+7}}{0,5 \cdot \frac{1}{4} \cdot 4^x - 1} \leq 0$$

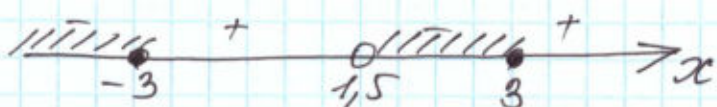
$$\frac{5^{2x^2+2x-20} - 5^{-x^2+2x+7}}{2^{2x} - 2^3} \leq 0$$

Знак выражения $a^{f(x)} - a^{g(x)}$
совпадает со знаком выражения
 $(a-1)(f(x) - g(x))$ при условиях $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$.

$$\frac{(5-1)(2x^2+2x-20+x^2-2x-7)}{(2-1)(2x-3)} \leq 0$$

$$\frac{3x^2 - 27}{2x - 3} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)(x+3)}{x-1,5} \leq 0$$



$$x \in (-\infty; -3] \cup (1,5; 3]$$

Ответ: $(-\infty; -3] \cup (1,5; 3]$

15.3. Смешанные неравенства.
Переменное основание.

3) **ЕГЭ - 2016**

$$(5x-13) \cdot \log_{2x-5} (x^2 - 6x + 10) \geq 0$$

1 способ (метод интервалов)

1. Введём функцию $f(x) = (5x-13) \cdot \log_{2x-5} (x^2 - 6x + 10)$.

$$2. D(f): \begin{cases} x^2 - 6x + 10 > 0 \\ 2x - 5 > 0 \\ 2x - 5 \neq 1 \end{cases} \begin{cases} (x-3)^2 + 1 > 0 \\ x > 2,5 \\ x \neq 3 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$x \in (2,5; 3) \cup (3; +\infty)$.

$$3. f(x) = 0; \begin{cases} 5x - 13 = 0 \\ \log_{2x-5} (x^2 - 6x + 10) = 0 \end{cases} \begin{cases} 5x = 13 \\ x^2 - 6x + 10 = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 2,6 \\ x = 3 \end{cases}, \begin{cases} 2,6 \in D(f) \\ 3 \notin D(f) \end{cases}$$

4.

$$\begin{aligned} 5x - 13 > 0 & \text{ при } x > 2,6 \\ 5x - 13 < 0 & \text{ при } x < 2,6 \end{aligned}$$

$$\log_{2x-5} (x^2 - 6x + 10) = \frac{\ln((x-3)^2 + 1)}{\ln(2x-5)}$$

$$\ln((x-3)^2 + 1) > 0, \text{ т.к. } (x-3)^2 + 1 > 1 \text{ на } \mathbb{R}.$$

$$\ln(2x-5) > 0 \text{ при } 2x-5 > 1; x > 3$$

$$\ln(2x-5) < 0 \text{ при } 0 < 2x-5 < 1; 2,5 < x < 3$$

$$f(x) \geq 0 \text{ при } x \in (2,5; 2,6] \cup (3; +\infty)$$

Ответ: $(2,5; 2,6] \cup (3; +\infty)$

II способ (метод замены множителей)

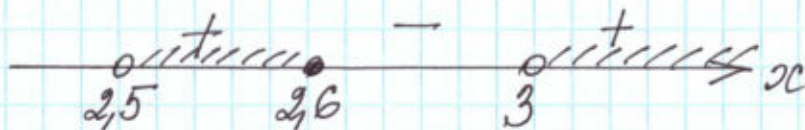
$$(5x-13) \cdot \log_{2x-5}(x^2-6x+10) \geq 0.$$

Знак выражения $\log_{h(x)} f(x)$ совпадает со знаком выражения $(h(x)-1)(f(x)-1)$ при условиях

$$\begin{cases} h(x) > 0 \\ h(x) \neq 1 \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-5 > 0 \\ 2x-5 \neq 1 \\ x^2-6x+10 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ (5x-13)(2x-5-1)(x^2-6x+10-1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2,5 \\ x \neq 3 \\ (x-2,6)(x-3)^3 \geq 0 \end{cases}$$



$$x \in (2,5; 2,6] \cup (3; +\infty)$$

Ответ: $[2,5; 2,6] \cup (3; +\infty)$

15.3. Смешанные неравенства.
Переменное основание.

4) ЕРЭ-2016 I способ

$$(4^{x^2-x-6}-1) \cdot \log_{0,15}(4^{x^2+2x+2}-3) \leq 0.$$

$$(4^{x^2-x-6}-1) \cdot (-\log_4(4^{x^2+2x+2}-3)) \leq 0$$

$$(4^{x^2-x-6}-4^0) \cdot \log_4(4^{x^2+2x+2}-3) \geq 0$$

Знак выражения $a^{f(x)} - a^{g(x)}$ совпадает
со знаком выражения $(a-1)(f(x)-g(x))$
при условиях: $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$

Знак выражения $\log_a f(x)$ совпадает
со знаком выражения $(a-1)(f(x)-1)$
при условиях: $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ f(x) > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} (4-1)(x^2-x-6-0)(4-1)(4^{x^2+2x+2}-3-1) \geq 0 \\ 4^{x^2+2x+2} > 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2-x-6)(4^{x^2+2x+2}-4) \geq 0 \\ 4^{x^2+2x+2} \geq 4 > 3; \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$(x+2)(x-3)(x^2+2x+2-1) \geq 0$$

$$(x+2)(x-3)(x+1)^2 \geq 0 \quad -2; -1; 3$$



$$x \in (-\infty; -2] \cup \{-1\} \cup [3; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup \{-1\} \cup [3; +\infty)$

$$(4^{x^2-x-6} - 1) \cdot \log_{0,25}(4^{x^2+2x+2} - 3) \leq 0.$$

II способ

$$1. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} 4^{x^2+2x+2} - 3 > 0 \\ 4^{(x+1)^2+1} > 3 \end{cases}$$

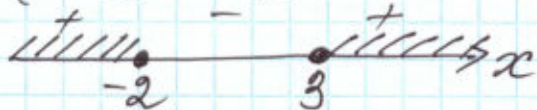
$$(x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow (x+1)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow 4^{(x+1)^2+1} \geq 4 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4^{x^2+2x+2} > 3 \text{ при любых значениях } x.$$

$$2. \begin{cases} 4^{x^2-x-6} - 1 \geq 0 \\ \log_{0,25}(4^{x^2+2x+2} - 3) \leq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 4^{x^2-x-6} - 1 \leq 0 \\ \log_{0,25}(4^{x^2+2x+2} - 3) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4^{x^2-x-6} \geq 4^0 \\ 4^{x^2+2x+2} \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0 \\ x^2 + 2x + 2 \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+2)(x-3) \geq 0 \\ (x+1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ (x+2)(x-3) \geq 0 \end{cases}$$



$$x \in (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$$

$$\begin{cases} 4^{x^2-x-6} \leq 4^0 \\ 4^{x^2+2x+2} - 3 \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 \leq 0 \\ x^2 + 2x + 2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+2)(x-3) \leq 0 \\ (x+1)^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+2)(x-3) \leq 0 \\ x = -1 \end{cases}$$



$$x = -1.$$

Объединим полученные решения:

$$x \in (-\infty; -2] \cup \{-1\} \cup [3; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup \{-1\} \cup [3; +\infty)$

15.3. Смешанные неравенства.
Переменное основание.

5) ЕГЭ-2017

$$\frac{\log_2(2x^2 - 17x + 35) - 1}{\log_7(x+6)} \leq 0$$

$$\frac{\log_2(2x^2 - 17x + 35) - \log_2 2}{\log_7(x+6)} \leq 0$$

Знак выражения $\log_a f(x) - \log_a g(x)$
совпадает со знаком выражения
 $(a-1)(f(x)-g(x))$ при условиях: $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Знак выражения $\log_a f(x)$ совпадает
со знаком выражения $(a-1)(f(x)-1)$
при условиях: $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ f(x) > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x^2 - 17x + 35 > 0 \\ x + 6 > 0 \\ \frac{(2x^2 - 17x + 35 - 2)(2-1)}{(x+6-1)(7-1)} \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x-5)(x-3,5) > 0 \\ x > -6 \\ \frac{2x^2 - 17x + 33}{x+5} \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-5)(x-3,5) > 0 \\ x > -6 \\ \frac{(x-3)(x-5,5)}{x+5} \leq 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} 3,5 ; 5 \\ -6 \\ 3 ; 5,5 \\ -5 \end{array} \right.$$

$$2x^2 - 17x + 35 = 0$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 280}}{4}$$

$$x = \frac{17 \pm 3}{4}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ x = 3,5 \end{cases}$$

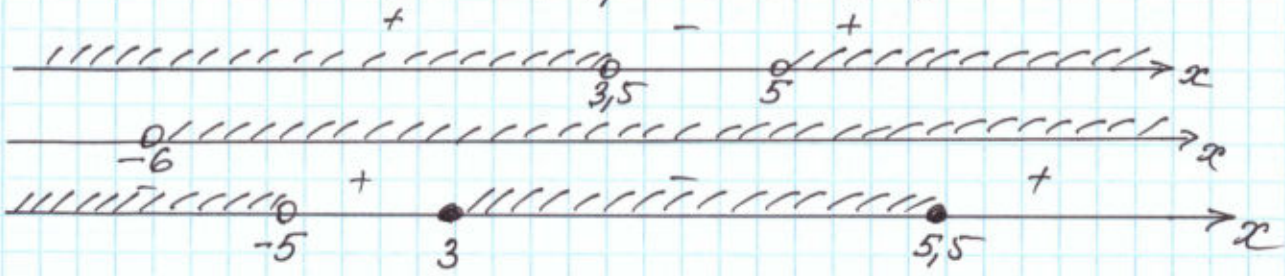
$$2x^2 - 17x + 33 = 0$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 264}}{4}$$

$$x = \frac{17 \pm 5}{4}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = 5,5 \end{cases}$$

$$-6 < -5 < 3 < 3,5 < 5 < 5,5$$



$$x \in (-6; -5) \cup [3; 3,5) \cup (5; 5,5]$$

Obtem: $(-6; -5) \cup [3; 3,5) \cup (5; 5,5]$

15.3. Смешанные неравенства.
Переменное основание.

$$6) \log_{3-x}(2x+1) \cdot \log_{3x+4}(4-x) \leq 0$$

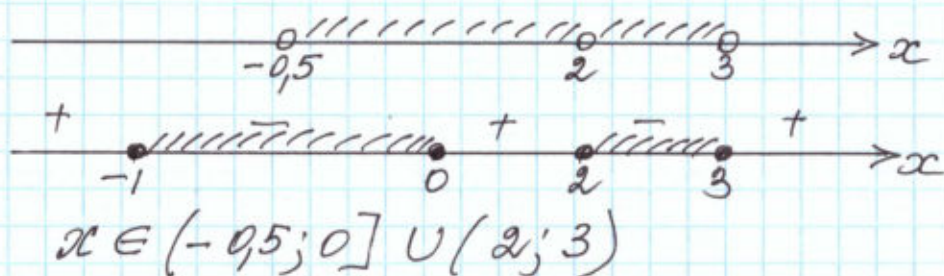
Знак выражения $\log_{h(x)} f(x)$ совпадает
со знаком выражения $(h(x)-1)(f(x)-1)$
при условиях: $\begin{cases} h(x) > 0 \\ h(x) \neq 1 \\ f(x) > 0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} 3-x > 0 \\ 3-x \neq 1 \\ 2x+1 > 0 \\ 3x+4 > 0 \\ 3x+4 \neq 1 \\ 4-x > 0 \end{cases}$$
$$(3-x-1)(2x+1-1)(3x+4-1)(4-x-1) \leq 0$$

$$\begin{cases} x < 3 \\ x \neq 2 \\ x > -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{4}{3} \\ x \neq -1 \\ x < 4 \end{cases}$$
$$(2-x) \cdot 2x \cdot (3x+3) \cdot (3-x) \leq 0$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} < x < 3 \\ x \neq 2 \end{cases} \quad \begin{array}{c} -\frac{1}{2}; 3 \\ 2 \\ -1; 0; 2; 3 \end{array}$$
$$x(x-2)(x+1)(x-3) \leq 0$$

$$-1 < -\frac{1}{2} < 0 < 2 < 3$$



$$x \in (-0.5; 0] \cup (2; 3)$$

Ответ: $(-0.5; 0] \cup (2; 3)$

15.3. Смешанные неравенства.
Переменное основание.

$$4) \log_{1-\frac{1}{(x-1)^2}} \left(\frac{x^2+5x+8}{x^2-3x+2} \right) \leq 0$$

Знак выражения $\log_{h(x)} f(x)$ совпадает
со знаком выражения $(h(x)-1)(f(x)-1)$
при условиях: $\begin{cases} h(x) > 0 \\ h(x) \neq 1 \\ f(x) > 0 \end{cases}$

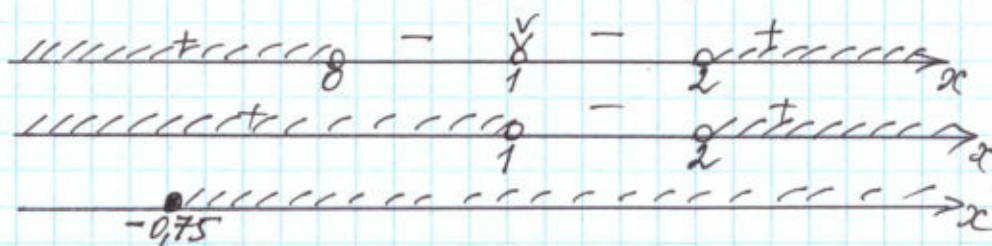
$$\begin{cases} 1-\frac{1}{(x-1)^2} > 0 \\ 1-\frac{1}{(x-1)^2} \neq 1 \\ \frac{x^2+5x+8}{x^2-3x+2} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2+5x+8 &> 0 \\ \text{при любых } x, \\ \text{т.к. } D < 0 \end{aligned}$$


$$\left(1-\frac{1}{(x-1)^2}-1\right) \left(\frac{x^2+5x+8}{x^2-3x+2}-1\right) \leq 0$$

$$\begin{cases} \frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2} > 0 \\ \frac{1}{(x-1)^2} \neq 0 - \text{выполняется при } x \neq 1. \\ x^2-3x+2 > 0 \\ \frac{1}{(x-1)^2} \cdot \left(\frac{x^2+5x+8-x^2+3x-2}{x^2-3x+2}\right) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} > 0 \\ (x-1)(x-2) > 0 \\ 8x+6 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} > 0 \\ (x-1)(x-2) > 0 \\ x \geq -0,75 \end{cases} \begin{array}{l} 0; 2 \\ 1; 2 \\ -0,75 \end{array}$$



$$x \in [-0,75; 0) \cup (2; +\infty)$$

Ответ: $[-0,75; 0) \cup (2; +\infty)$

15.3. Смешанные неравенства.
Переменное основание.

$$8) \log_{\frac{x}{2}} (x^2 - 2x + 1) \geq 2.$$

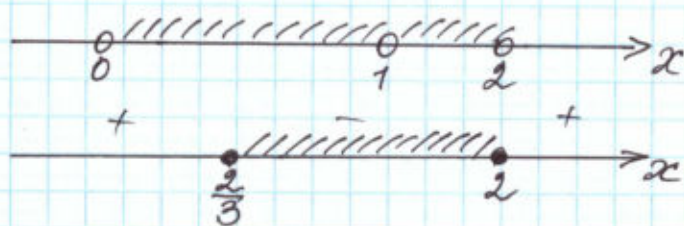
$$\log_{\frac{x}{2}} (x^2 - 2x + 1) \geq \log_{\frac{x}{2}} \left(\frac{x^2}{4}\right)$$

$$\begin{cases} 0 < \frac{x}{2} < 1 \\ 0 < x^2 - 2x + 1 \leq \frac{x^2}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < 2 \\ (x-1)^2 > 0 \\ 4x^2 - 8x + 4 - x^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < 2 \\ x \neq 1 \\ 3x^2 - 8x + 4 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < 2 \\ x \neq 1 \\ 3(x-2)(x-\frac{2}{3}) \leq 0 \end{cases}$$

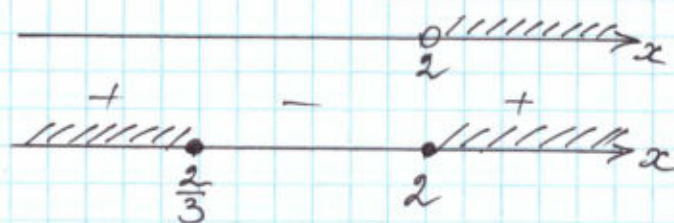


$$x \in [\frac{2}{3}; 1) \cup (1; 2)$$

$$\text{или} \begin{cases} \frac{x}{2} > 1 \\ x^2 - 2x + 1 \geq \frac{x^2}{4} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ x \neq 0 \\ 4x^2 - 8x + 4 - x^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ 3(x-2)(x-\frac{2}{3}) \geq 0 \end{cases}$$



$$x \in (2; +\infty).$$

Объединим полученные решения:

$$x \in [\frac{2}{3}; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$$

Ответ: $[\frac{2}{3}; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$

15.3. Смешанные неравенства.
Термическое основание.

$$9) \log_{x^3-9x^2+27x-27} (9-x) \geq 0$$

$$\log_{(x-3)^3} (9-x) \geq 0$$

$$\frac{1}{3} \cdot \log_{x-3} (9-x) \geq 0$$

$$\log_{x-3} (9-x) \geq 0$$

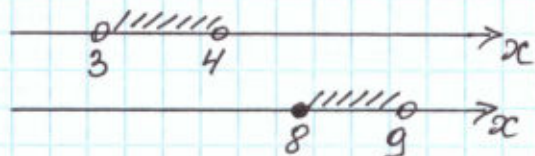
$$\begin{cases} 0 < x-3 < 1 \\ 0 < 9-x \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 < x < 4 \\ 8 \leq x < 9 \end{cases}$$

$$\text{или} \begin{cases} x-3 > 1 \\ 9-x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 4 \\ x \leq 8 \end{cases}$$

$$x \in (4; 8]$$



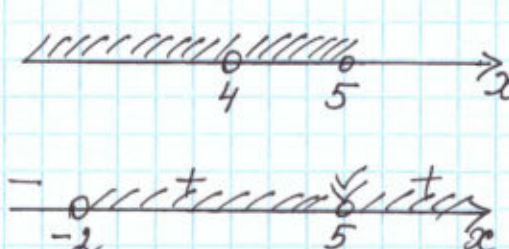
нет решений

Ответ: $(4; 8]$

15.3.

Смешанные неравенства.
Зеркальное основание.

$$10) \log_{5-x} \frac{x+2}{(x-5)^4} \geq -4$$

$$I. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} 5-x > 0 \\ 5-x \neq 1 \\ \frac{x+2}{(x-5)^4} > 0 \end{cases} \begin{cases} x < 5 \\ x \neq 4 \\ \frac{x+2}{(x-5)^4} > 0 \end{cases}$$


$$x \in (-2; 4) \cup (4; 5)$$

$$II. \log_{5-x} (x+2) - \log_{5-x} (5-x)^4 \geq -4.$$

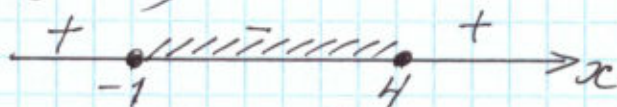
$$\log_{5-x} (x+2) - 4 + 4 \geq 0$$

$$\log_{5-x} (x+2) \geq 0$$

$$(5-x-1)(x+2-1) \geq 0$$

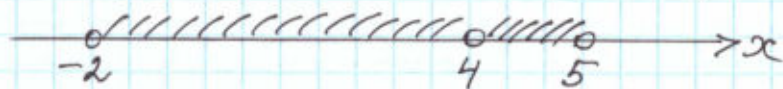
$$(4-x)(x+1) \geq 0$$

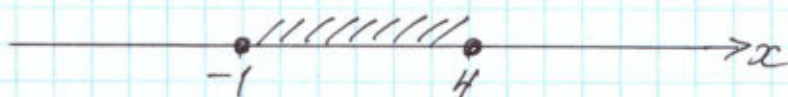
$$(x-4)(x+1) \leq 0$$



$$x \in [-1; 4].$$

III. С учётом ОДЗ получим:





$$x \in [-1; 4)$$

Ответ: $[-1; 4)$

Задание №15.3 (ДЗ). Смешанные неравенства. Переменное основание.

1) $\frac{x \cdot 7^x - 7^{x+1} - 2x + 14}{175 + x \cdot 5^x - 25x - 7 \cdot 5^x} \geq \frac{1}{5^{x-1} - 5}.$

2) $\frac{16 \cdot 2^{x^2(x-3)} - (0,125)^{x^2-4}}{0,04 \cdot 25^{2x^2-11} - 5} \geq 0.$

3) $(20 - 11x) \cdot \log_{5x-9}(x^2 - 4x + 5) \leq 0. \quad (\text{ЕГЭ-2016})$

4) $\left(9^{x^2-1} - 3^{5x+1}\right) \cdot \log_{\frac{1}{3}}\left(3^{x^2+4x+6} - 8\right) \geq 0.$

5) $\frac{\log_5(3x^2 + 11x + 6) + \log_{0,2}(x^2 + 1)}{\log_{0,2}(7 - x)} \geq 0.$

6) $\log_{4-x}(3x + 8) \cdot \log_{2x+5}(5 - x) \geq 0.$

7) $\log_{\frac{1}{\sin^2 x}}\left(\frac{2}{x^2 - 5x + 6}\right) \geq 0.$

8) $\log_{\sqrt{4x-7}}(x^2 - 4x + 5) \leq 2.$

9) $\log_{x+2}(1 - 6x + 12x^2 - 8x^3) \leq 0.$

10) $\log_{x^2+1}(9 - x^2) \leq 1 + \log_{x^2+1}(x + 3).$

Задание №15.3 (ДЗ). Ответы.

1) $(-\infty; 1]; (2; 7); (7; +\infty).$

2) $(-2, 5; 2]; (2, 5; +\infty).$

3) $\left(\frac{9}{5}; \frac{20}{11}\right]; (2; +\infty).$

4) $-2; [-0, 5; 3].$

5) $[-5; -3); \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right]; (6; 7).$

6) $\left(-\frac{5}{2}; -\frac{7}{3}\right]; (-2; 3).$

7) $\left[1; \frac{\pi}{2}\right); \left(\frac{\pi}{2}; 2\right); (3; \pi); (\pi; 4]$

8) $(1, 75; 2); (2; 6].$

9) $(-2; -1); [0; 0, 5).$

10) $(-3; -2]; [1; 3).$

