Людмила Ивановна Скрипка

ЗАДАНИЕ №16

МАТЕМАТИКА

ЕГЭ 2021

Рукописный вариант

СОДЕРЖАНИЕ

Оглавление..2
Задание №16.1 Треугольники (часть1)...2
Решения...4
Задание №16.1. Ответы. 15
Задание №16.2. Треугольники(часть2)..16
Решения...14
Задание №16.2. Ответы. 26
Задание №16.3. Четырехугольники(часть 1) 27
Решения...29
Задание №16.3. Ответы. 28
Задание №16.3. Четырехугольники (часть 2). 40
Решения...42
Задание №16.4. Ответы. 51
Задание №16.5. Четырехугольники (часть 3). Окружности. 52
Решения...50
Задание №16.5. Ответы. 64

Задание №16.1. Треугольники (часть 1).

1) (ЕГЭ-2014)

Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H.

а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.

б) Найдите BC, если $AH = 21$ и $\angle BAC = 30°$.

2) (ЕГЭ-2018)

Высоты тупоугольного треугольника ABC с тупым углом ABC пересекаются в точке H, $\angle AHC = 60°$.

а) Докажите, что угол $\angle ABC = 120°$.

б) Найдите BH, если $AB = 6$, $BC = 10$.

3) (ЕГЭ-2018)

Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, а BH — высота этого треугольника.

а) Докажите, что углы ABH и CBO равны.

б) Найдите BH, если $AB = 16$, $BC = 18$, $BH = BO$.

4) (ЕГЭ-2014)

В равнобедренном треугольнике ABC с углом $120°$ при вершине A проведена биссектриса BD. В треугольник ABC вписан прямоугольник $DEFH$ так, что сторона FH лежит на отрезке BC, а вершина E — на отрезке AB.

а) Докажите, что $FH = 2DH$.

б) Найдите площадь прямоугольника $DEFH$, если $AB = 4$.

5) (ЕГЭ-2014)

В треугольнике ABC проведена биссектриса AM. Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно AM, пересекает сторону AC в точке N. Известно, что $AB = 6$, $BC = 5$, $AC = 9$.

а) Докажите, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам.

б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите отношение $AP : PN$.

6) (ЕГЭ-2017)

Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к гипотенузе пересекает катет BC в точке N.

а) Докажите, что $\angle CAN = \angle CMN$.

б) Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ANB и CBM, если $\operatorname{tg}\angle BAC = \dfrac{4}{3}$.

7) (ЕГЭ-2017)

В треугольник ABC, в котором длина стороны AC меньше длины стороны BC, вписана окружность с центром O. Точка B_1 симметрична точке B относительно CO.

а) Докажите, что точки A, B, O и B_1 лежат на одной окружности.

б) Найдите площадь четырехугольника $AOBB_1$, если $AB = 10$, $AC = 6$ и $BC = 8$.

8) (ЕГЭ-2018)

На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отложены равные отрезки AP и CQ, соответственно.

а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная его основанию, проходит через середину отрезка PQ.

б) Найдите длину отрезка прямой PQ, заключенного внутри вписанной окружности треугольника ABC, если $AB = AC = BC = 3\sqrt{2}$, $CQ = AP = \sqrt{2}$.

9) (ЕГЭ-2019)

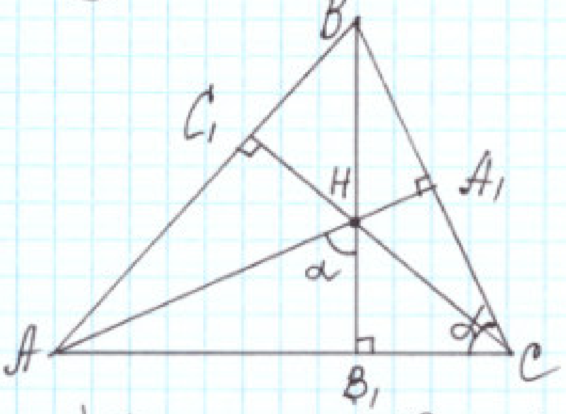
В треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH. На отрезках AH и HB как на диаметрах построены окружности.

а) Докажите, что отношение площадей кругов, построенных на этих диаметрах, равно $(\operatorname{tg}\angle ABC)^4$.

б) Окружность с центром O_1, лежащим на AH, пересекает AC второй раз в точке P. Окружность с центром O_2, лежащим на HB, пересекает BC второй раз в точке Q. Найдите площадь четырехугольника PO_1O_2Q, если $AC = 12,\ BC = 10$.

16.1. Треугольники (часть 1)

(1) ЕГЭ-2014.



Дано: $\triangle ABC$ - остроугольный

$BB_1 \perp AC$, $CC_1 \perp AB$

$BB_1 \cap CC_1 = H$

а) Док-ть: $\angle AHB_1 = \angle ACB$

б) Найти: BC, если $AH=21$, $\angle BAC=30°$.

а) Пусть $\angle ACB = \alpha$, тогда $\angle CBB_1 = 90° - \alpha$, $\angle BHA_1 = \alpha$,

$\angle AHB_1 = \angle BHA_1 = \alpha$, как вертикальные, т.е. $\angle AHB_1 = \angle ACB$.

б) $\angle BAC = 30° \Rightarrow \angle ABB_1 = 60°$; $AH = 21$.

Пусть $BC = x$, тогда из $\triangle BB_1C$: $\sin\alpha = \frac{BB_1}{x}$, $\cos\alpha = \frac{B_1C}{x}$

$BB_1 = x\sin\alpha$, $B_1C = x\cos\alpha$.

$\triangle BB_1C \sim \triangle AB_1H$ по двум углам $\Rightarrow$

$$\frac{BB_1}{AB_1} = \frac{BC}{AH}; \quad \frac{x\cdot\sin\alpha}{AB_1} = \frac{x}{21} \Rightarrow AB_1 = 21\cdot\sin\alpha.$$

По теореме синусов для $\triangle ABB_1$:

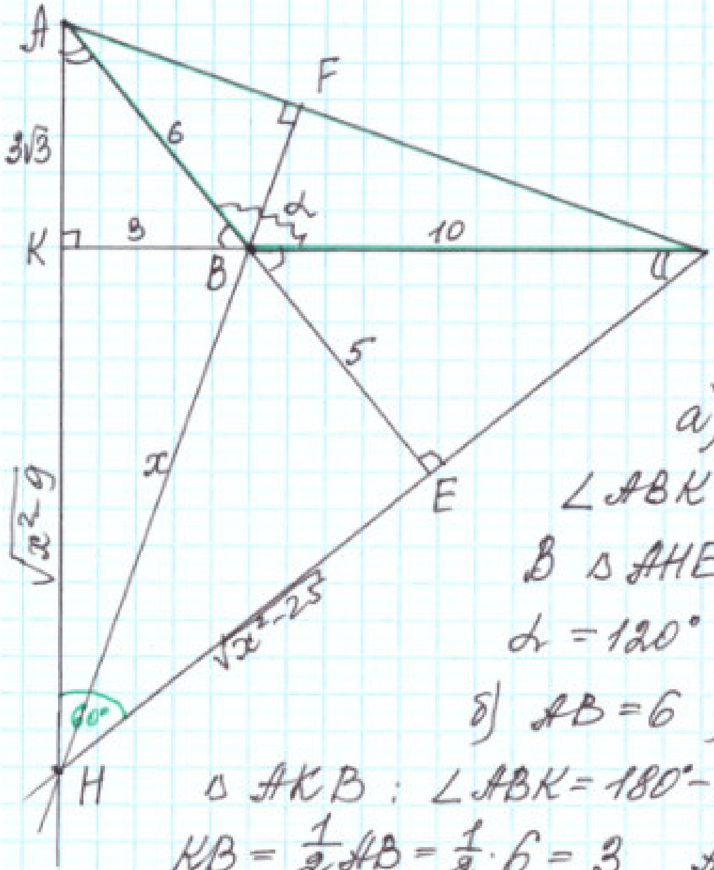
$$\frac{AB_1}{\sin 60°} = \frac{BB_1}{\sin 30°}; \quad \frac{2\cdot 21\cdot\sin\alpha}{\sqrt{3}} = \frac{2\cdot x\cdot\sin\alpha}{1}$$

$$x = \frac{21}{\sqrt{3}}; \quad x = \frac{21\cdot\sqrt{3}}{3} \quad x = 7\sqrt{3}. \quad \boxed{BC = 7\sqrt{3}}$$

Ответ: б) $7\sqrt{3}$

16.1. Треугольники (часть 1)

(2) ЕГЭ-2018



Дано: $\triangle ABC$, $\angle ABC$ – тупой
$AK \perp BC$, $BF \perp AC$, $CE \perp AB$
$AK \cap BF \cap CE = H$
$\angle AHC = 60°$

а) Док-ть: $\angle ABC = 120°$

б) Найти: BH, если $AB = 6$, $BC = 10$.

а) Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда

$\angle ABK = 180° - \alpha$, $\angle KAB = 90° - (180° - \alpha) = \alpha - 90°$.

В $\triangle AHE$: $\angle HAE + \angle AHE = 90°$; $\alpha - 90° + 60° = 90°$.

$\alpha = 120°$, $\angle ABC = 120°$.

б) $AB = 6$, $BC = 10$. Пусть $BH = x$

$\triangle AKB$: $\angle ABK = 180° - 120° = 60°$, $\angle KAB = 30°$.

$KB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$, $AK = 6 \cdot \sin 60° = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

$\triangle KBH$: $KB = 3$, $BH = x \Rightarrow KH = \sqrt{x^2 - 3^2} = \sqrt{x^2 - 9}$

$\triangle BCE$: $\angle CBE = \angle ABK = 60°$, $\angle BCE = 30°$, $BE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$.

$\triangle BEH$: $BE = 5$, $BH = x \Rightarrow HE = \sqrt{x^2 - 5^2} = \sqrt{x^2 - 25}$

$\triangle AHE$: $AH = 3\sqrt{3} + \sqrt{x^2 - 9}$; $HE = \sqrt{x^2 - 25}$; $AE = 6 + 5 = 11$.

$AH^2 = HE^2 + AE^2$; $(3\sqrt{3} + \sqrt{x^2 - 9})^2 = (\sqrt{x^2 - 25})^2 + 11^2$

$$27 + 6\sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 - 9} + x^2 - 9 = x^2 - 25 + 121$$

$$6\sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 - 9} = 78$$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 - 9} = 13$$

$$3x^2 - 27 = 169$$

$$3x^2 = 196$$

$$x^2 = \frac{196}{3}$$

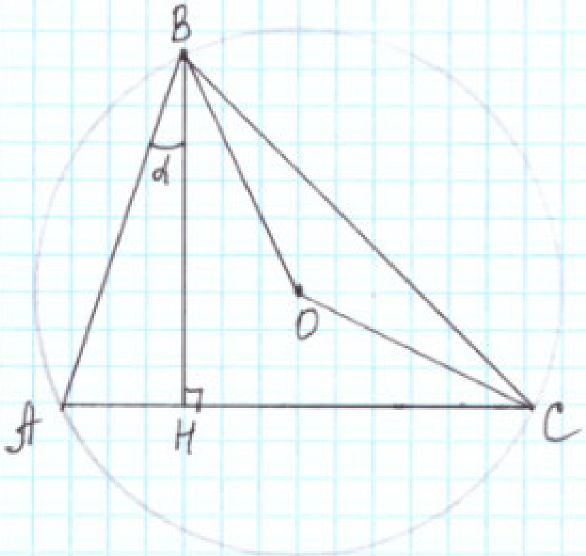
$$x = \frac{14}{\sqrt{3}}$$

$x = \frac{14\sqrt{3}}{3}$. $BH = \frac{14\sqrt{3}}{3}$

Ответ: б) $\frac{14\sqrt{3}}{3}$

16.1. Треугольники (часть 1)

3 ЕГЭ-2018



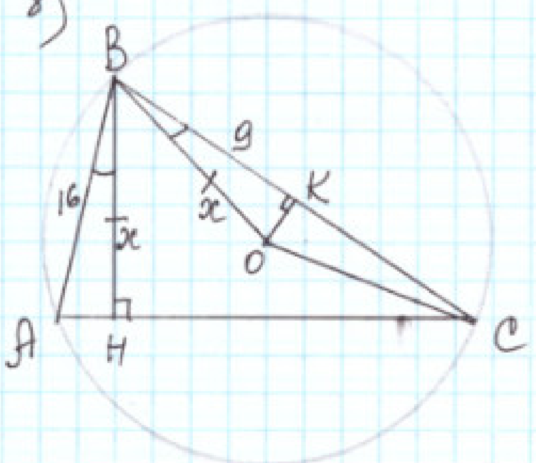
Дано: $\triangle ABC$ – остроугольный
O – центр описанной окр-ти.
$BH \perp AC$

а) Док-ть: $\angle ABH = \angle CBO$.

б) Найти: BH, если $AB = 16$
$BC = 18$
$BH = BO$.

а) Пусть $\angle ABH = \alpha$ тогда $\angle BAH = 90° - \alpha$, $\angle BAC = 90° - \alpha$.
$\angle BAC$ – вписанный, опирается на $\smile BC$,
$\angle BOC$ – центральный, опирается на $\smile BC$, $\Big| \angle BOC = 180° - 2\alpha$
$\triangle BOC$ – равнобедренный, т.к. $BO = OC$ как радиусы.
$\angle CBO = \angle BCO = \dfrac{180° - (180° - 2\alpha)}{2} = \dfrac{2\alpha}{2} = \alpha$., $\angle CBO = \alpha$
т.е. $\angle ABH = \angle CBO$.

б)

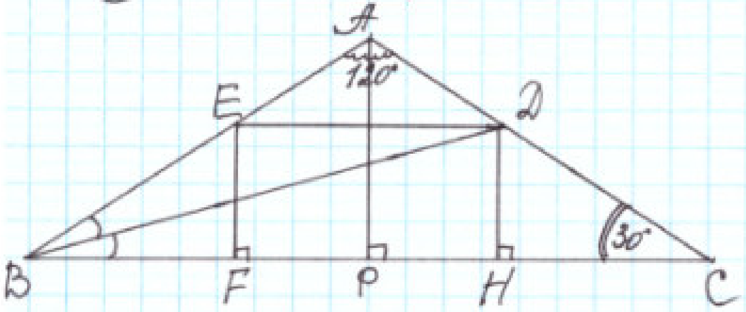


$OK \perp BO$, $\angle ABH = \angle CBO$. Пусть $BH = OB = x$
$AB = 16$, $BC = 18$, $BK = KC = 9$.
$\triangle ABH \sim \triangle OBK$ по двум углам.
$\dfrac{AB}{OB} = \dfrac{BH}{BK}$; $\dfrac{16}{x} = \dfrac{x}{9}$, $x^2 = 16 \cdot 9$
$x = 4 \cdot 3$, $x = 12$, $\boxed{BH = 12}$

Ответ: б) 12

16.1. Треугольники (часть 1)

(4) ЕГЭ-2014



Дано: $\triangle ABC$, $\angle BAC = 120^\circ$
$AB = AC$
BD – биссектриса $\triangle ABC$
$DEFH$ – прямоугольник
$E \in AB$, $FH \subset BC$

а) Док-ть: $FH = 2 \cdot DH$.

б) Найти: S_{DEFH}, если $AB = 4$.

а). $AP \perp BC$, P – середина BC, AP – ось симметрии $\triangle ABC$, значит AP – ось симметрии $DEFH$. Если докажем, что $DH = PH$, то это будет означать, что $FH = 2DH$.

$\angle BAC = 120^\circ$, $AB = AC \Rightarrow \angle ABC = 30^\circ$, $\angle ABD = \angle DBC = 15^\circ$.

Пусть $AB = x$, тогда $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 120^\circ}$

$BC = \sqrt{x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = x\sqrt{3}$.

По свойству биссектрисы: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$; $\frac{AD}{DC} = \frac{x}{x\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$AD = \frac{x}{1+\sqrt{3}}$; $DC = \frac{\sqrt{3}x}{1+\sqrt{3}}$

$\triangle APC$: $\angle PAC = 60^\circ$, $\angle ACP = 30^\circ$, $AP = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}x = \frac{x}{2}$.

$DH = \frac{1}{2}DC = \frac{\sqrt{3}x}{2(1+\sqrt{3})}$

$\triangle APC \sim \triangle DHC$ по двум углам, $\frac{AP}{DH} = \frac{PC}{HC}$; $\frac{x \cdot 2(1+\sqrt{3})}{2 \cdot \sqrt{3}x} = \frac{x\sqrt{3}}{2 \cdot HC}$

$\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{3}}{2HC}$; $HC = \frac{3x}{2(1+\sqrt{3})}$, $PH = PC - HC = \frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{3x}{2(1+\sqrt{3})} =$

$= \frac{x}{2}\left(\sqrt{3} - \frac{3}{1+\sqrt{3}}\right) = \frac{x\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})}$, $PH = \frac{x\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})} = DH \Rightarrow FH = 2 \cdot DH$.

б) $S_{DEFH} = FH \cdot DH = 2 \cdot DH \cdot DH = 2 \cdot DH^2$.

$AB = x = 4$, $DH = \frac{\sqrt{3} \cdot 4}{2(1+\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

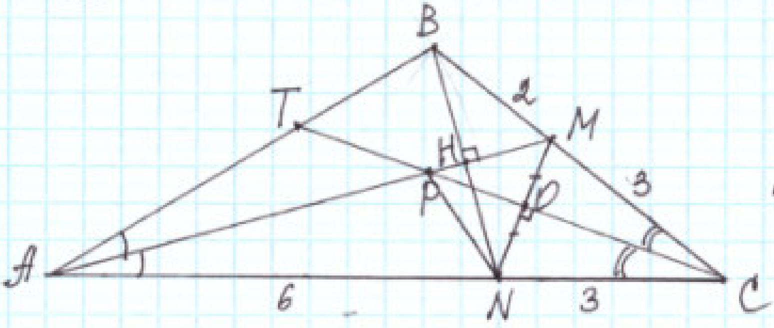
$S_{DEFH} = 2 \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2 \cdot 12}{1+2\sqrt{3}+3} = \frac{24}{2(2+\sqrt{3})} = \frac{12 \cdot (2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 12(2-\sqrt{3})$

$S_{DEFH} = 12(2-\sqrt{3})$

Ответ: б) $12(2-\sqrt{3})$

$\boxed{16.1}$ Треугольники (часть 1)

⑤ ЕГЭ-2014



Дано: $\triangle ABC$, AM - биссектриса
$BH \perp AM$, $BH \cap AC = N$
$AB = 6$, $BC = 5$, $AC = 9$

а) Док-ть: $MO = ON$, если
CT-биссектриса $\triangle ABC$
$CT \cap MN = O$

б) Найти: $AP : PN$, если
$P = AM \cap CT$

а) $\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC}$ (по свойству биссектрисы).

$\frac{BM}{MC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, $BC = 5 \Rightarrow BM = 2$, $MC = 3$.

В $\triangle ABN$ AH - биссектриса и высота, значит

$\triangle ABN$ - равнобедренный, $AN = AB = 6$, $NC = 9 - 6 = 3$.

В $\triangle CMN$ CO - биссектриса, $CN = CM$, значит

CO - высота и медиана, т.е. $MO = ON$.

б) P - точка пересечения биссектрис.

В $\triangle PMN$ PO - высота и медиана $\Rightarrow PN = PM$.

Для $\triangle AMN$ и прямой PC по теореме Менелая:

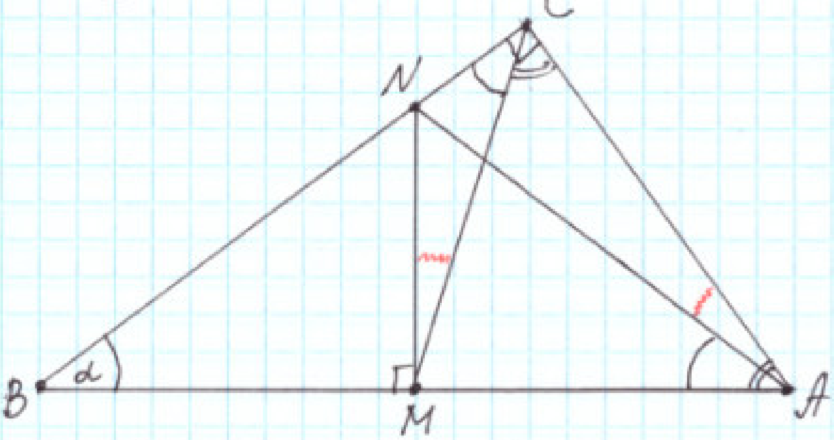
$\frac{AP}{PM} \cdot \frac{MO}{ON} \cdot \frac{NC}{CA} = 1$; $\frac{AP}{PM} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{9} = 1$; $\frac{AP}{PM} = \frac{3}{1}$

но $PM = PN$, значит $\boxed{\frac{AP}{PN} = \frac{3}{1}}$

Ответ: б) $\frac{3}{1}$

16.1. Треугольники (часть 1).

⑥ ЕГЭ – 2017



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$,
M – середина AB
$MN \perp AB$, $N \in BC$

а) Док-ть: $\angle CAN = \angle CMN$

б) Найти: $R_{ANB} : R_{CBM}$, если $tg\angle BAC = \frac{4}{3}$

а) Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle BCM = \alpha$, т.к. $BM = CM$

$\angle ACM = 90^\circ - \alpha$, $\angle BAC = 90^\circ - \alpha$, т.к. $CM = AM$.

$\angle BAN = \alpha$, т.к. MN – медиана и высота в $\triangle ABN$,

$\angle CAN = 90^\circ - \alpha - \alpha = 90^\circ - 2\alpha$; $\boxed{\angle CAN = 90^\circ - 2\alpha}$

$\angle CMB = 180^\circ - 2\alpha$; $\angle CMN = 180^\circ - 2\alpha - 90^\circ$, $\boxed{\angle CMN = 90^\circ - 2\alpha}$

Получим: $\angle CAN = \angle CMN$, ч.т.д.

б). $\angle BAC = 90^\circ - \alpha$, $tg(90^\circ - \alpha) = \frac{4}{3} = \frac{BC}{AC}$.

Пусть $BC = 4x$, $AC = 3x$, тогда $AB = 5x$,

$BM = AM = CM = \frac{5x}{2}$

$tg(90^\circ - \alpha) = ctg\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $tg\alpha = \frac{3}{4}$

$tg\alpha = \frac{MN}{BM}$, $\frac{3}{4} = \frac{2\cdot MN}{5x}$; $MN = \frac{15x}{8}$, $BN = \frac{BM}{\cos\alpha} = \frac{5x\cdot 5}{2\cdot 4} = \frac{25x}{8}$

$S_{ANB} = \frac{AB\cdot MN}{2} = \frac{5x\cdot 15x}{2\cdot 8} = \frac{75x^2}{16}$

$R_{ANB} = \frac{AN\cdot NB\cdot AB}{4\cdot S_{ANB}} = \frac{25x\cdot 25x\cdot 5x\cdot 16}{8\cdot 8\cdot 4\cdot 75x^2} = \boxed{\frac{125x}{48}}$

$S_{CBM} = \frac{1}{2}\cdot BM\cdot BC\cdot \sin\alpha = \frac{5x\cdot 4x\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 5} = \frac{15}{5}x^2 = 3x^2$

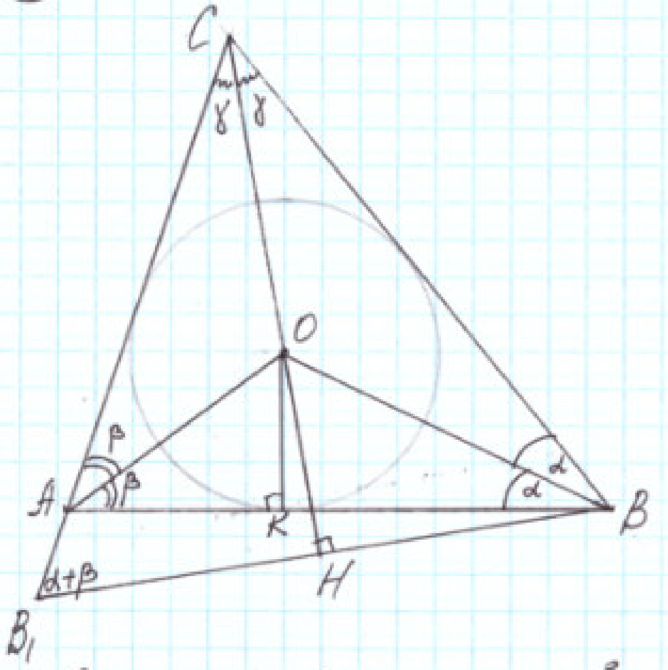
$R_{CBM} = \frac{BC\cdot BM\cdot CM}{4\cdot S_{CBM}} = \frac{4x\cdot 5x\cdot 5x}{4\cdot 2\cdot 2\cdot 3x^2} = \boxed{\frac{25x}{12}}$

$\frac{R_{ANB}}{R_{CBM}} = \frac{125x\cdot 12}{48\cdot 25x} = \frac{5}{4}$

Ответ: б) $\frac{5}{4}$

16.1. Треугольники (часть 1)

7 ЕГЭ-2017



Дано: $\triangle ABC$, $AC < BC$
Окр$(O;r)$ - вписана в $\triangle ABC$
B_1 симметрична B отн. CO.

а) Док-ть: точки A, B, O, B_1 лежат на одной окружности.

б) Найти: S_{AOBB_1}, если $AB=10$, $AC=6$, $BC=8$.

а) O - центр вписанной окружности, значит AO, CO, BO - биссектрисы углов. Пусть $\angle A = 2\beta$, $\angle B = 2\alpha$, $\angle C = 2\gamma$, тогда $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$, $\alpha + \beta + \gamma = 90°$, $\gamma = 90° - (\alpha+\beta)$.

Т.к. B и B_1 симметричны относительно CO, то CO - биссектриса $\angle BCB_1$, т.е. $BC = B_1C$, $CO \cap BB_1 = H$ $CH \perp BB_1$, H - середина BB_1, $A \in B_1C$.

В $\triangle CB_1H$: $\angle B_1CH = \gamma = 90° - (\alpha+\beta) \Rightarrow \angle CB_1H = \alpha+\beta$.

В $\triangle AOK$: $OK \perp AB$, $\angle OAK = \beta \Rightarrow \angle AOK = 90° - \beta$.

В $\triangle BOK$: $\angle OBK = \alpha \Rightarrow \angle BOK = 90° - \alpha$.

$\angle AOB = (90° - \alpha) + (90° - \beta) = 180° - (\alpha+\beta)$.

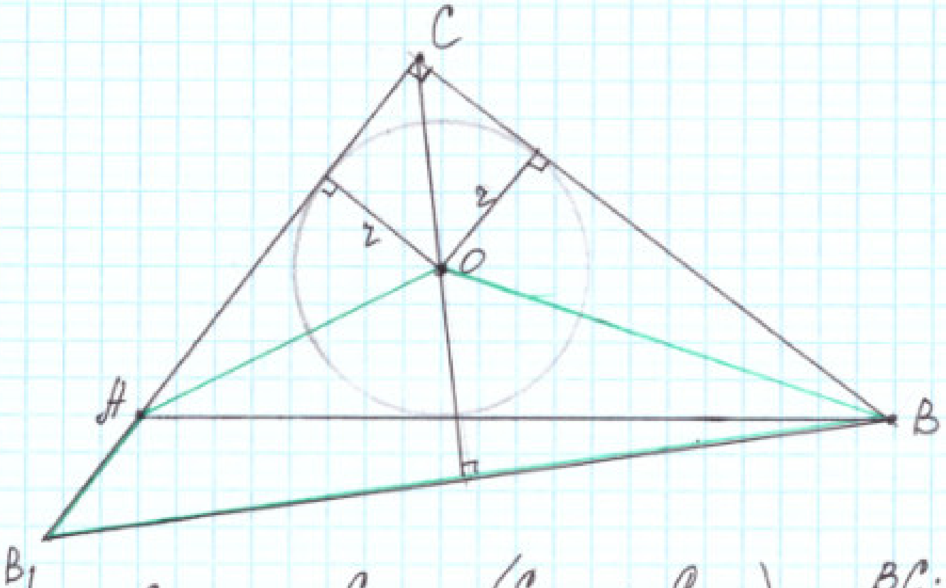
В четырехугольнике $AOBB_1$ сумма противоположных углов $\angle AB_1B + \angle AOB = \alpha + \beta + 180° - (\alpha+\beta) = 180°$, значит вокруг этого четырехугольника можно описать окружность, значит точки A, B, O и B_1 лежат на одной окружности.

б) $AB = 10$, $AC = 6$, $BC = 8$

Такой треугольник будет прямоугольный,
т.к. $10^2 = 6^2 + 8^2$, $AB^2 = AC^2 + BC^2$, $\angle C = 90^\circ$.

r - радиус вписанной окружности.

$$r = \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{6+8-10}{2} = 2. \qquad \boxed{r = 2}$$



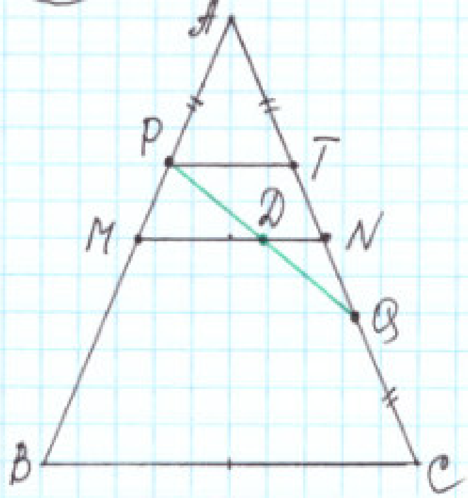
$$S_{AOBB_1} = S_{BCB_1} - (S_{AOC} + S_{BOC}) = \frac{BC \cdot B_1C}{2} - \left(\frac{AC \cdot r}{2} + \frac{BC \cdot r}{2}\right) =$$

$$= \frac{8 \cdot 8}{2} - \left(\frac{6 \cdot 2}{2} + \frac{8 \cdot 2}{2}\right) = 32 - (6+8) = 32 - 14 = 18.$$

__Ответ:__ б) 18

16.1. Треугольники (часть 1)

8) ЕГЭ-2018



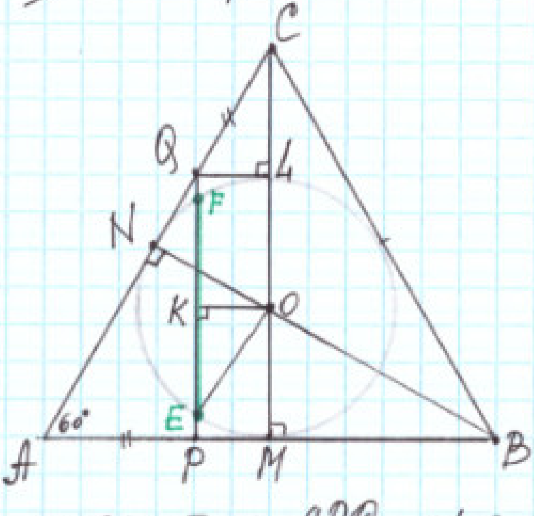
Дано: $\triangle ABC$, $AB = AC$
$P \in AB$, $Q \in AC$
$AP = CQ$

а) Док-ть: D - середина PQ, если $D = PQ \cap MN$, MN - средняя линия

б) Найти: EF, если EF внутри вписанной в $\triangle ABC$ окр-ти, $EF \subset PQ$, $AB = BC = AC = 3\sqrt{2}$
$CQ = AP = \sqrt{2}$.

а). Проведем $PT \parallel BC$, $T \in AC$, тогда $AT = AP$
MN - средняя линия $\triangle ABC$, N - середина AC и $MN \parallel BC$.
N - середина TQ, т.к. $AT = CQ$, $ND \parallel BC \Rightarrow ND \parallel PT$.
По теореме Фалеса в $\triangle PTQ$ DN будет средней линией,
D - середина PQ.

б) Теперь $\triangle ABC$ - равносторонний, $AB = 3\sqrt{2}$; $AP = \sqrt{2}$.



$AQ = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$; $CM = \frac{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

$AM = \frac{1}{2}AB = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $PM = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\triangle APQ$: $PQ = \sqrt{AP^2 + AQ^2 - 2AP\cdot AQ\cdot \cos 60°}$
(по теореме косинусов)

$PQ = \sqrt{2 + 8 - 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{10-4} = \sqrt{6}$.

Получаем: $AQ^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$
$PQ^2 + AP^2 = (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2 = 6 + 2 = 8$,

значит $\triangle APQ$ - прямоугольный, $PQ \perp AP$, $CM \parallel PQ$.

$\frac{PQ}{CM} = \frac{\sqrt{6}\cdot 2}{3\sqrt{6}} = \frac{2}{3}$, $QL \perp CM$, $OK \perp PQ$, $QL \parallel OK \parallel PM$.

точка O - центр вписанной окружности, $OM = \frac{1}{2}OC$,

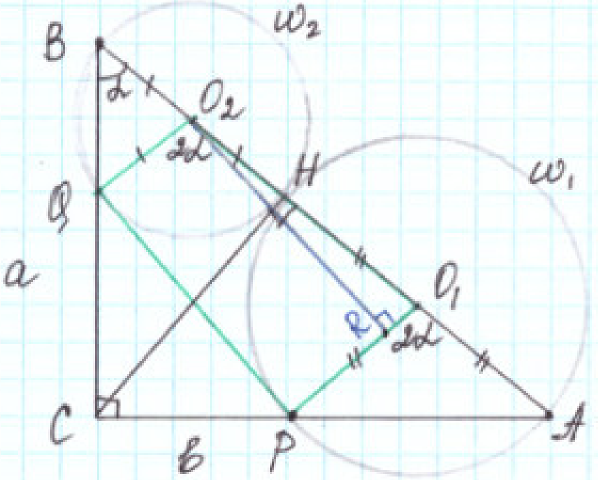
$OM = OL = CL$, $OM = OE = r = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $OK = PM = AM - AP = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\triangle OKE$: $KE = \sqrt{OE^2 - OK^2} = \sqrt{\frac{6}{4} - \frac{2}{4}} = 1$. $EF = 2KE = 2$.

Ответ: б) 2.

16.1 Треугольники (часть 1)

9 ЕГЭ - 2019



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C=90^\circ$
$CH\perp AB$
$\omega_1 = \text{Окр}(O_1; r_1)$, AH — диаметр
$\omega_2 = \text{Окр}(O_2; r_2)$, BH — диаметр.

а) Док-ть: $\frac{S_1}{S_2} = (tg\angle ABC)^4$

б) Найти: $S_{PO_1O_2Q}$, если
$\omega_1 \cap AC = P$, $\omega_2 \cap BC = Q$
$AC=12$, $BC=10$.

а) Пусть $\angle ABC=\alpha$, $AC=в$, $BC=a$, $AB=\sqrt{a^2+в^2}$

$tg\,\alpha = \frac{в}{a}$; $CH = a\cdot\sin\alpha$; $BH = a\cdot\cos\alpha$

$\angle BAC = 90^\circ-\alpha$; $AH = в\cdot\cos(90^\circ-\alpha) = в\sin\alpha$.

$r_1 = \frac{AH}{2} = \frac{в\cdot\sin\alpha}{2}$; $r_2 = \frac{BH}{2} = \frac{a\cdot\cos\alpha}{2}$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \left(\frac{в\cdot\sin\alpha}{a\cdot\cos\alpha}\right)^2 = (tg\alpha\cdot tg\alpha)^2 = tg^4\alpha$$

$$\frac{S_1}{S_2} = (tg\angle ABC)^4.$$

б) $AC = в = 12$, $BC = a = 10$, $tg\,\alpha = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$

$AB = \sqrt{12^2+10^2} = \sqrt{144+100} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}$

$\sin\alpha = \frac{12}{2\sqrt{61}} = \frac{6}{\sqrt{61}}$; $\cos\alpha = \frac{10}{2\sqrt{61}} = \frac{5}{\sqrt{61}}$; $\sin 2\alpha = \frac{60}{\sqrt{61}^2} = \frac{60}{61}$

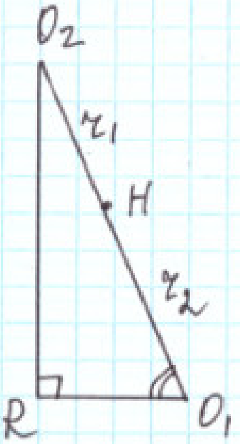
$\triangle BQO_2$: $BO_2 = QO_2 = r_2$, $\angle BO_2Q = 180^\circ - 2\alpha$, $\angle QO_2H = 2\alpha$.

$\triangle APO_1$: $AO_1 = PO_1 = r_1$, $\angle AO_1P = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha$.

$\angle AO_1P$ и $\angle QO_2H$ соответственные при прямых O_1P и O_2Q и секущей AB. Так как они равны, то $O_1P \parallel O_2Q$. $O_1O_2 \nparallel PQ$, т.к. $r_1 \neq r_2$.

Значит, PO_1O_2Q — трапеция.

$S_{PO_1O_2Q} = \frac{O_2Q + O_1P}{2}\cdot O_2R$, где $O_2R \perp O_1P$



ΔO_1O_2R: $O_1O_2 = r_1 + r_2 = \frac{1}{2}AB = \frac{2\sqrt{61}}{2} = \sqrt{61}$

$\angle O_2O_1R = 180° - 2\alpha$

$O_2R = O_1O_2 \cdot \sin(180° - 2\alpha) = O_1O_2 \cdot \sin 2\alpha$

$O_2R = \sqrt{61} \cdot \frac{60}{61} = \frac{60}{\sqrt{61}}$

O_2R - высота трапеции PO_1O_2Q.

$$S_{PO_1O_2Q} = \frac{\sqrt{61}}{2} \cdot \frac{60}{\sqrt{61}} = 30.$$

<u>Ответ</u>: б) 30

Задание №16.1. Ответы.

1) $7\sqrt{3}$.

2) $\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$.

3) 12.

4) $24 - 12\sqrt{3}$.

5) $3 : 1$.

6) $\dfrac{5}{4}$.

7) 18.

8) 2.

9) 30.

Задание №16.2. Треугольники (часть 2).

1) (ЕГЭ-2014)

Около остроугольного треугольника ABC описана окружность с центром O. На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $\angle BAC + \angle AKC = 90°$.

а) Докажите, что четырехугольник $OBKC$ вписанный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырехугольника $OBKC$, если $\cos\angle BAC = 0,6$, а $BC = 48$.

2) (ЕГЭ-2019)

Высота BH треугольника ABC, опущенная из вершины B вторично пересекает окружность, описанную около треугольника ABC в точке K. BN — диаметр.

а) Докажите, что $AN = KC$.

б) Найдите NK, если радиус окружности 20, $\angle BAC = 25°$, $\angle BCA = 85°$.

3) (ЕГЭ-2014)

В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH. Из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC.

б) Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырехугольника $AKMC$, если $BH = 2$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 4.

4) (ЕГЭ-2015)

Окружность, построенная на медиане BM равнобедренного треугольника ABC как на диаметре, второй раз пересекает основание BC в точке K.

а) Докажите, что отрезок BK втрое больше отрезка CK.

б) Пусть указанная окружность пересекает сторону AB в точке N. Найдите AB, если $BK = 18$ и $BN = 17$.

5) (ЕГЭ-2016)

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C точки M и N — середины катетов AC и BC, соответственно, CH — высота.

а) Докажите, что прямые MH и NH перпендикулярны.

б) Пусть P — точка пересечения прямых AC и NH, а Q — точка пересеченния прямых BC и MH. Найдите площадь треугольника PQM, если $AH = 4$ и $BH = 2$.

6) (ЕГЭ-2017)

В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB, соответственно, AH — высота, $\angle BAC = 60°$, $\angle BCA = 45°$.

а) Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.

б) Найдите A_1H, если $BC = 2\sqrt{3}$.

7) (ЕГЭ-2016)

В треугольнике ABC проведены высоты AK и CM. На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH, соответственно.

а) Докажите, что прямые EH и AC параллельны.

б) Найдите отношение $EH : AC$, если $\angle ABC = 30°$.

8) (ЕГЭ-2016)

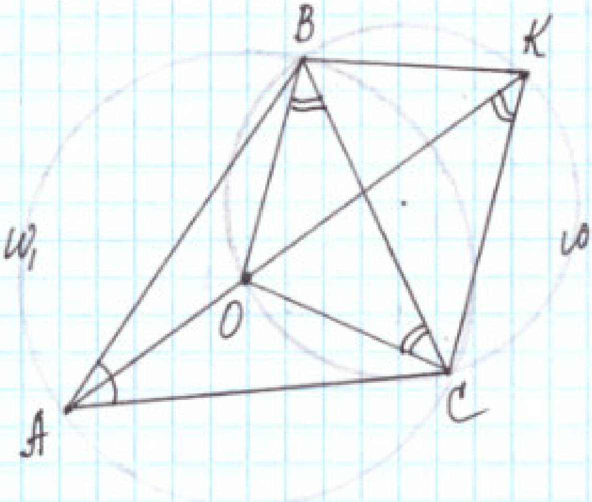
Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, I — центр вписанной в него окружности, H — точка пересечения высот. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.

а) Докажите, что точка I лежит на окружности, описанной около треугольника BOC.

б) Найдите угол OIH, если $\angle ABC = 55°$.

16.2. Треугольники (часть 2).

(1) ЕГЭ-2014



Дано: $\triangle ABC$ – остроугольный
$\triangle ABC$ вписан в окр. ω_1,
O – центр ω_1,
$K \in$ лучу AO,
$\angle BAC + \angle AKC = 90°$

а) Док-ть: OBKC – вписанный.

б) Найти: R, если R – радиус окружности ω_2, описанной около OBKC, $\cos\angle BAC = 0{,}6$; $BC = 48$.

а) Пусть $\angle AKC = \alpha$, тогда $\angle BAC = 90° - \alpha$.
$\angle BAC$ – вписанный, $\angle BOC$ – центральный и они опираются на одну дугу BC, значит $\angle BOC = 180° - 2\alpha$.
$OB = OC$ как радиусы, $\triangle OBC$ – равнобедренный,
$\angle OBC = \angle OCB = \alpha$. Отрезок OC из точек B и K виден под одинаковым углом α, значит точки O, B, K и C лежат на одной окружности, т.е. OBKC – вписанный, ч.т.д.

б) $BC = 48$; $\cos\angle BAC = \cos(90° - \alpha) = 0{,}6 \Rightarrow \sin\angle BAC = 0{,}8$.
$\triangle ABC$ вписан в окружность ω_1 радиуса OC,

$$\frac{BC}{\sin\angle BAC} = 2 \cdot OC, \quad 2 \cdot OC = \frac{48}{0{,}8} = \frac{480}{8} = 60, \quad \boxed{OC = 30}$$

$\triangle OBC$ вписан в окружность ω_2 радиуса R,

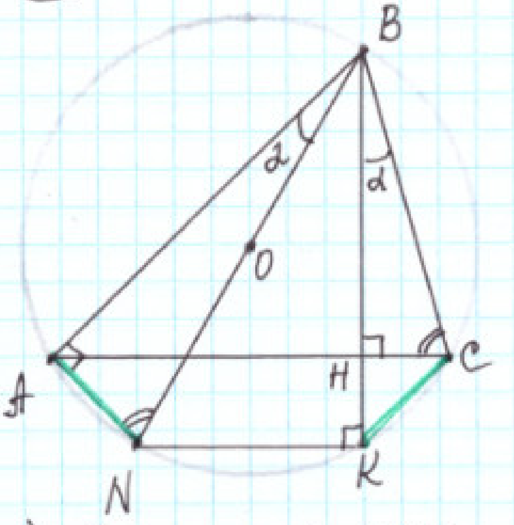
$$\frac{BC}{\sin\angle BOC} = 2R; \quad 2R = \frac{48}{\sin 2\cdot\angle BAC} = \frac{48}{2\cdot\sin\angle BAC \cdot \cos\angle BAC} =$$

$$= \frac{48}{2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}6} = \frac{2400}{8 \cdot 6} = 50; \quad 2R = 50 \Rightarrow \boxed{R = 25}$$

Ответ: б) 25

162. Треугольники (часть 2).

2 ЕГЭ-2019



Дано: $\triangle ABC$ вписан в окружность
$BH \perp AC$, $BH \cap$ окр. $= K$
BN — диаметр

а) Док-ть: $AN = KC$.
б) Найти: NK, если $R = 20$,
R — радиус окружности,
$\angle BAC = 25^\circ$, $\angle BCA = 85^\circ$.

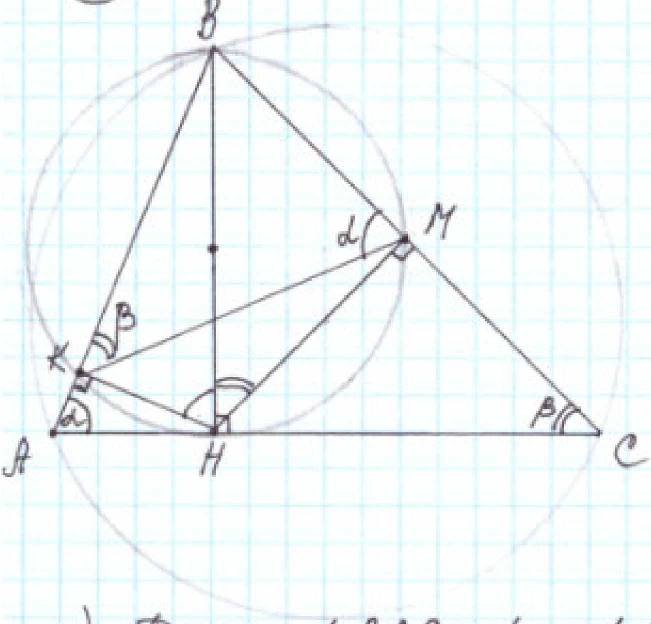
а) Пусть $\angle ABN = \alpha$, тогда в $\triangle ABN$ $\angle ANB = 90^\circ - \alpha$,
т. к. $\angle BAN = 90^\circ$.
$\angle ANB = \angle ACB = 90^\circ - \alpha$, как вписанные, которые опираются на одну дугу AB.
В $\triangle BHC$: $\angle BHC = 90^\circ$, $\angle CBH = \alpha \Rightarrow \angle CBK = \alpha$.
Получим $\angle ABN = \angle CBK$, вписанные и равные углы опираются на равные хорды, $AN = KC$, ч.т.д.

б) $R = 20$; $\angle BAC = 25^\circ$; $\angle BCA = 85^\circ \Rightarrow \angle ABC = 70^\circ$.
$\angle ANB = \angle BCA = 85^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ - 85^\circ = 5^\circ$.
$\angle NBK = 70^\circ - 5^\circ - 5^\circ = 60^\circ$.
$\triangle NBK$ — прямоугольный, BN — диаметр.
$\angle BKN = 90^\circ$. $NK = BN \cdot \sin 60^\circ$
$NK = 2 \cdot 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$.

Ответ: б) $20\sqrt{3}$

16.2. Треугольники (часть 2)

③ ЕГЭ – 2014



Дано: $\triangle ABC$ – остроугольный
$BH \perp AC$, $HK \perp AB$, $HM \perp BC$.

а) Док-ть: $\triangle MBK$ и $\triangle ABC$ подобны

б) Найти: $S_{MBK} : S_{AKMC}$, если $BH = 2$, $R = 4$,
R-радиус описанной окружности около $\triangle ABC$.

а). Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle ACB = \beta$, тогда $\angle ABH = 90° - \alpha$,
$\angle BHK = \alpha$, $\angle CBH = 90° - \beta$, $\angle BHM = \beta$.
4уг-к BMHK можно вписать в окружность, т.к.
$\angle KBM + \angle KHM = 180°$ и $\angle BKH + \angle BMH = 180°$; BH-диаметр.
$\angle KHB = \angle KMB = \alpha$ как вписанные, опирающиеся на $\smile KB$.
$\angle BHM = \angle BKM = \beta$ как вписанные, опирающиеся на $\smile BM$.
$\underline{\triangle MBK \sim \triangle ABC}$ по двум углам.

б) $BH = 2$, $r = 1$ – радиус малой окружности
$R = 4$ – радиус большой окружности.
Окружности подобны с коэффициентом $\frac{r}{R} = \frac{1}{4}$.
Треугольники подобны с этим же коэффициентом.

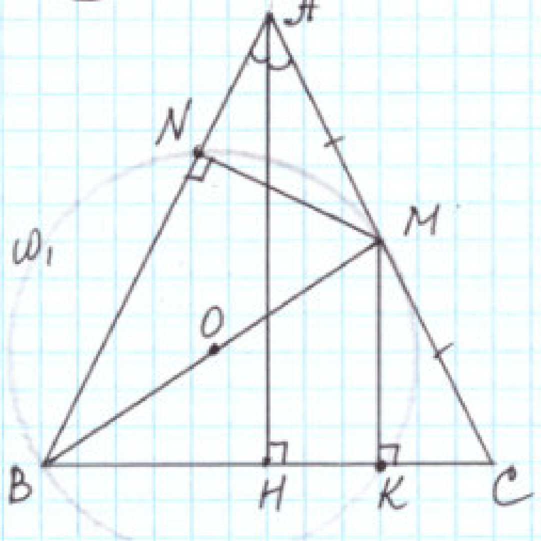
$$\frac{S_{MBK}}{S_{ABC}} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}, \quad S_{MBK} = \frac{1}{16} S_{ABC} \Rightarrow S_{AKMC} = \frac{15}{16} S_{ABC}$$

$$\frac{S_{MBK}}{S_{AKMC}} = \frac{1}{15}$$

<u>Ответ</u>: б) $\frac{1}{15}$

16.2. Треугольники (часть 2)

(4) ЕГЭ - 2015



Дано: $\triangle ABC$, $AB = AC$
BM – медиана
BM – диаметр окр. ω_1
$\omega_1 \cap BC = K$

а) Док-ть: $BK = 3 \cdot CK$

б) Найти: AB, если $BK = 18$, $BN = 17$, $\omega_1 \cap AB = N$

а) M – середина AC. Пусть $AM = MC = x$, $AB = 2x$.
$AH \perp BC$, H – середина BC, $BH = HC$.
$\triangle AHC \sim \triangle MKC$, т.к. $\angle AHC = 90°$, $\angle BKM = \angle MKC = 90°$ и $\angle C$ – общий. $MC = \frac{1}{2}AC \Rightarrow CK = \frac{1}{2}HC$.
Если $CK = y$, то $HC = 2y$, $BH = 2y$, $BK = 3y$, получаем, что $BK = 3 \cdot CK$, ч. т. д.

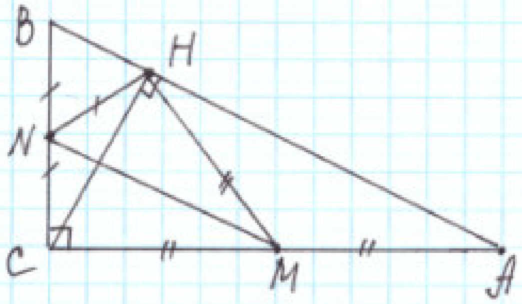
б) $\omega_1 \cap AB = N$, $BN = 17$, $BK = 18$, $CK = \frac{1}{3}BK = 6$.
$\triangle BNM$ и $\triangle BKM$ – прямоугольные.
$\triangle MNA$ и $\triangle MKC$ – прямоугольные.

$$BM^2 = BN^2 + MN^2 = BN^2 + (AM^2 - AN^2) = 17^2 + x^2 - AN^2$$
$$BM^2 = BK^2 + MK^2 = 18^2 + (MC^2 - KC^2) = 18^2 + x^2 - 6^2 \Rightarrow$$
$$17^2 + x^2 - AN^2 = 18^2 + x^2 - 6^2$$
$$AN^2 = 17^2 - 18^2 + 6^2$$
$$AN^2 = -1 \cdot 35 + 36$$
$$AN^2 = 1$$
$$AN = 1$$
$$AB = AN + BN = 1 + 17 = 18.$$

Ответ: б) 18

16.2. Треугольники (часть 2)

5 ЕГЭ-2016.



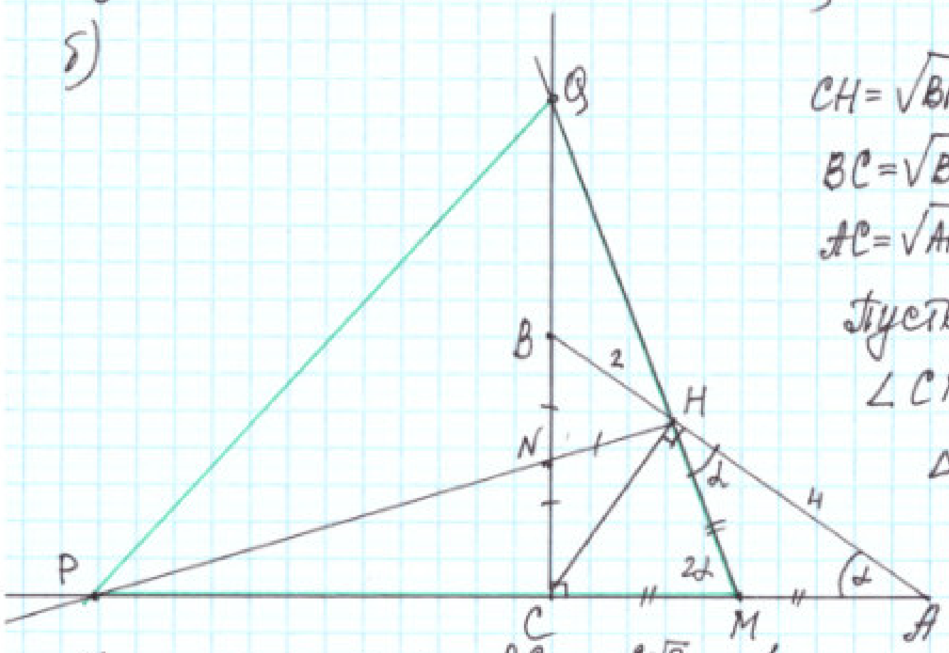
Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$
$CH \perp AB$
M - середина AC
N - середина BC

а) Док-ть: $MH \perp NH$

б) Найти: S_{PQM}, если $AH=4$, $BH=2$
$P = AC \cap NH$, $Q = BC \cap MH$.

а) В прямоугольном треугольнике ACH HM - медиана, $HM = CM = AM$. Аналогично, в $\triangle BCH$ $BN = NC = NH$.
$\triangle NCM = \triangle NHM$ по трем сторонам ($NC = NH$; $CM = HM$, MN - общ.)
Значит $\angle NHM = \angle NCM = 90°$, т.е. $MH \perp NH$.

б)



$CH = \sqrt{BH \cdot AH} = \sqrt{2 \cdot 4} = 2\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{BH^2 + CH^2} = \sqrt{4+8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{16+8} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

Пусть $\angle CAB = \alpha$, тогда $\angle MHA = \alpha$
$\angle CMH = 2\alpha$

$\triangle MHP = \triangle MCQ$ по катету и острому углу ($MH = MC$, $\angle M$ - общий).

Из $\triangle ABC$ $tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{2}{\sqrt{2}(1-\frac{1}{2})} = \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{2} \cdot 1} = 2\sqrt{2}$, $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$\triangle CMQ$: $CM = \frac{1}{2}AC = \sqrt{6}$, $tg2\alpha = \frac{CQ}{CM} \Rightarrow CQ = \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{3}$ $\boxed{CQ = 4\sqrt{3}}$

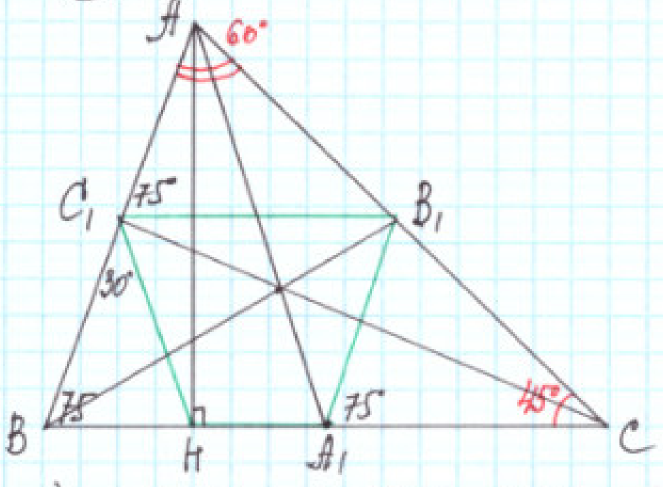
$\cos 2\alpha = \frac{CM}{QM} \Rightarrow QM = \frac{\sqrt{6} \cdot 3}{1} = 3\sqrt{6}$, $QM = MP$ $\boxed{MP = 3\sqrt{6}}$

$S_{PQM} = \frac{MP \cdot CQ}{2} = \frac{3\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 6 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 18\sqrt{2}$ $\boxed{S_{PQM} = 18\sqrt{2}}$

Ответ: б) $18\sqrt{2}$

16.2. Треугольники (часть 2)

(6) ЕГЭ-2017



Дано: $\triangle ABC$, $\angle BAC=60°$, $\angle BCA=45°$
A_1 – середина BC
B_1 – середина AC
C_1 – середина AB
$AH \perp BC$

а) Док-ть: точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окр-ти.

б) Найти: A_1H, если $BC=2\sqrt{3}$.

а) $\triangle ABC$: $\angle ABC = 180° - (60°+45°) = 180° - 105° = 75°$.

$\triangle ABH$ – прямоугольный, HC_1 – медиана, $HC_1 = BC_1 = AC_1 \Rightarrow$

$\triangle BC_1H$ – равнобедренный, $\angle C_1BH = \angle C_1HB = 75° \Rightarrow \angle BC_1H = 30°$

B_1C_1 – средняя линия $\triangle ABC$, $B_1C_1 \parallel BC \Rightarrow \angle AC_1B_1 = 75°$

$\angle B_1C_1H = 180° - (30°+75°) = 180° - 105° = 75°$ $\boxed{\angle B_1C_1H = 75°}$

A_1B_1 – средняя линия $\triangle ABC$, $A_1B_1 \parallel AB \Rightarrow \angle B_1A_1C = 75°$

$\angle B_1A_1H = 180° - 75° = 105°$ $\boxed{\angle B_1A_1H = 105°}$

В четырехугольнике $A_1B_1C_1H$ сумма противоположных углов равна 180°, значит вокруг него можно описать окружность, т.е. A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окр-ти.

б) $BC = 2\sqrt{3}$, $A_1C = A_1B = \sqrt{3}$

$\sin 75° = \sin(45°+30°) = \sin 45° \cdot \cos 30° + \cos 45° \cdot \sin 30° = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 2} + \frac{\sqrt{2}\cdot 1}{2\cdot 2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

По теореме синусов: $\frac{BC}{\sin 60°} = \frac{AC}{\sin 75°}$, $AC = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{6}+\sqrt{2})2}{\sqrt{3}\cdot 4} = \sqrt{2}+\sqrt{6}$

$\triangle AHC$ – прямоугольный и равнобедренный, т.к. $\angle BCA = 45°$

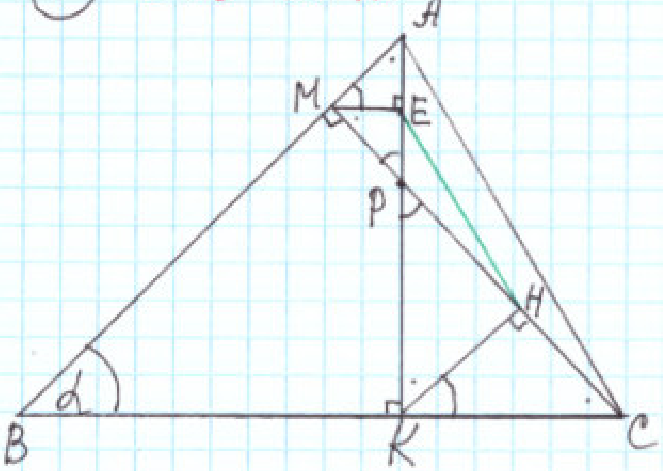
$HC = AH = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = 1+\sqrt{3}$

$A_1H = HC - A_1C = 1+\sqrt{3} - \sqrt{3} = 1$ $\boxed{A_1H = 1}$

Ответ: б) 1

162 Треугольники (часть 2)

7 ЕГЭ-2016



Дано: $\triangle ABC$
$AK \perp BC$, $CM \perp AB$
$ME \perp AK$, $KH \perp CM$

а) Док-ть: $EH \parallel AC$

б) Найти: $EH : AC$, если $\angle ABC = 30°$.

а). Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle AME = \angle APM = \angle CPK = \angle CKH = \alpha$
$\angle BAK = \angle PME = \angle PKH = \angle KCH = 90° - \alpha$.

$\triangle APM \sim \triangle CPK$ по двум углам

$$\frac{AP}{CP} = \frac{PM}{PK} \quad (1)$$

$\triangle MPE \sim \triangle KPH$ по двум углам

$$\frac{PM}{PK} = \frac{PE}{PH} \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует $\frac{AP}{CP} = \frac{PM}{PK} = \frac{PE}{PH}$, т.е. $\frac{AP}{CP} = \frac{PE}{PH}$,
или $\frac{AP}{PE} = \frac{CP}{PH}$. Учитывая, что $\angle APC = \angle EPH$, получаем, что $\triangle APC \sim \triangle EPH$ по двум пропорциональным сторонам и равному углу между ними.

А значит, $\angle PAC = \angle PEH$. Отсюда следует, что $EH \parallel AC$.

б) $\angle ABC = \alpha = 30°$.

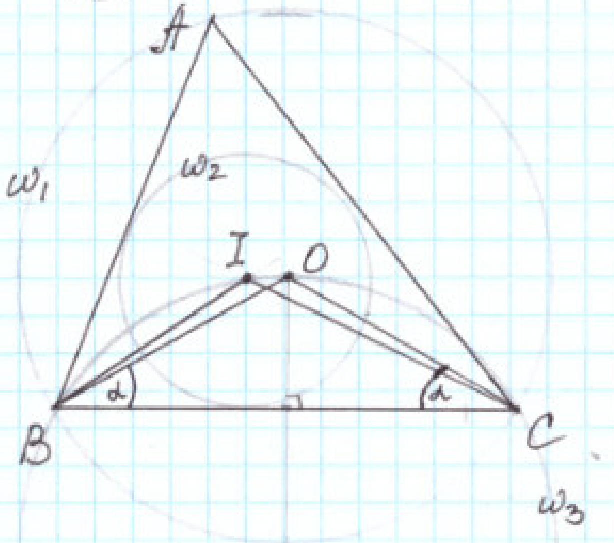
Пусть $AE = x$, тогда в $\triangle AME$ $tg\,30° = \frac{x}{ME}$, $ME = x\sqrt{3}$.
В $\triangle MPE$ $tg\,30° = \frac{x\sqrt{3}}{PE}$, $PE = 3x$. $AP = AE + PE = x + 3x = 4x$
Из подобия $\triangle APC$ и $\triangle EPH$: $\frac{AP}{PE} = \frac{AC}{EH}$; $\frac{EH}{AC} = \frac{PE}{AP}$

$$\frac{EH}{AC} = \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}$$

Ответ: б) $\frac{3}{4}$

16.2. Треугольники (часть 2).

(8) ЕГЭ – 2016



Дано: $\triangle ABC$ – остроугольный.
$\omega_1 = \text{окр}(O; R)$ – описана
$\omega_2 = \text{окр}(I; r)$ – вписана
H – точка пересечения высот.
$\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.

а) Док-ть: $I \in \omega_3$, где ω_3 – окружность, описанная около $\triangle BOC$.

б) Найти: $\angle OIH$, если $\angle ABC = 55°$

а). O – центр описанной окружности, значит $OB = OC$, $\angle OBC = \angle OCB = \alpha \Rightarrow \angle BAC = \alpha + \alpha = 2\alpha$

$\angle BAC$ – вписанный, опирается на дугу BC,
$\angle BOC$ – центральный, опирается на дугу BC,
значит $\angle BOC = 2 \cdot \angle BAC = 4\alpha$.

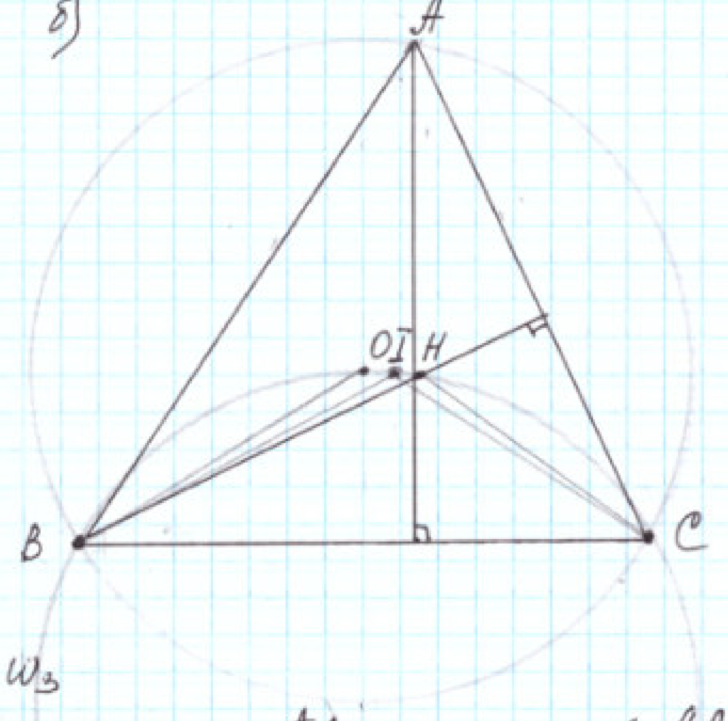
В $\triangle OBC$: $\alpha + \alpha + 4\alpha = 180°$, $6\alpha = 180°$, $\alpha = 30°$.
$\angle OBC = \angle OCB = 30°$, $\angle BAC = 60°$, $\angle BOC = 120°$.

I – центр вписанной окружности, значит BI, CI – биссектрисы углов, т.е. $\angle B + \angle C = 180° - 60°$.
$\angle B + \angle C = 120°$, $\frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 60°$.

В $\triangle BIC$: $\angle BIC = 180° - (\frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C) = 180° - 60° = 120°$.

$\angle BOC = \angle BIC = 120°$. Отрезок BC виден из точек I и O под одинаковым углом, это значит, что точка I лежит на окружности ω_3, описанной около $\triangle BOC$.

б)



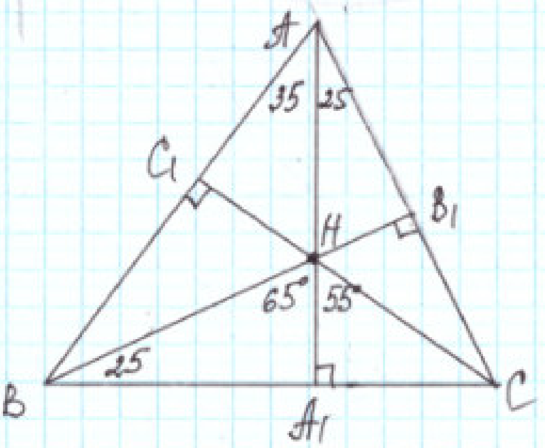
$\angle BAC = 60^\circ$ из а)

$\angle ABC = 55^\circ$ по условию

$\angle ACB = 180^\circ - 60^\circ - 55^\circ = 65^\circ.$

Мы уже доказали, что точки B, O, I, C лежат на одной окружности ω_3.

Докажем, что точка H тоже лежит на ω_3.



$\triangle AA_1C: \angle ACB = 65^\circ \Rightarrow \angle CAA_1 = 25^\circ$

$\triangle AHB_1: \angle AHB_1 = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ.$

$\angle BHA_1 = \angle AHB_1 = 65.$

$\triangle BAA_1: \angle ABA_1 = 55^\circ,\ \angle BAA_1 = 35^\circ$

$\triangle AHC_1: \angle AHC_1 = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$

$\angle CHA_1 = 55^\circ$

$\angle BHC = 65^\circ + 55^\circ = 120^\circ \Rightarrow H \in \omega_3.$

$\angle OIB$ — вписанный, опирается на $\smile BO$

$\angle OIB = \frac{1}{2} \smile BO = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \smile BC = \frac{1}{4} \cdot 120^\circ = 30^\circ$

$\angle BIC = 120^\circ$

$\angle CIH$ — вписанный, опирается на $\smile HC$

$\angle CIH = \angle CBH = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ.$

$\angle OIH = \angle OIB + \angle BIC + \angle CIH = 30^\circ + 120^\circ + 25^\circ = 175^\circ.$

<u>Ответ:</u> б) 175°

Задание №16.2. Ответы.

1) 25.

2) $20\sqrt{3}$.

3) $1 : 15$.

4) 18.

5) $18\sqrt{2}$.

6) 1.

7) $3 : 4$.

8) 175°.

Задание №16.3. Четырехугольники (часть 1).

1) (ЕГЭ-2017)

Основания трапеции равны 4 и 9, а её диагонали равны 5 и 12.

а) Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны.

б) Найдите высоту трапеции.

2) (ЕГЭ-2018)

В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD углы ABD и ACD прямые.

а) Докажите, что $AB = CD$.

б) Найдите AD, если $AB = 2,\ BC = 7$.

3) (ЕГЭ-2016)

Один из двух отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника, делит его площадь пополам, а другой в отношении $11 : 17$.

а) Докажите, что данный четырехугольник — трапеция.

б) Найдите отношение оснований этой трапеции.

4) (ЕГЭ-2018)

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $AB = 3,\ BC = CD = 5,\ AD = 8,\ AC = 7$.

а) Докажите, что вокруг этого четырехугольника можно описать окружность.

б) Найдите BD.

5) (ЕГЭ-2018)

Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса $R = 8$. Известно, что $AB = BC = CD = 12$.

а) Докажите, что прямые BC и AD параллельны.

б) Найдите AD.

6) (ЕГЭ-2014)

Диагональ AC разбивает трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC, $AD > BC$, на два подобных треугольника.

а) Докажите, что $\angle ABC = \angle ACD$.

б) Найдите отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, если известно, что $BC = 18,\ AD = 50$ и $\cos\angle CAD = 0,6$.

7) (ЕГЭ-2015)

В трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана окружность с центром в точке O.

а) Докажите, что $\sin\angle AOD = \sin\angle BOC$.

б) Найдите площадь трапеции, если $\angle BAD = 90^\circ$, а основания равны 5 и 7.

8) (ЕГЭ-2017)

Точка E — середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. На её стороне AB взяли точку K так, что прямые CK и AE параллельны. Отрезки CK и BE пересекаются в точке O.

а) Докажите, что $CO = KO$.

б) Найдите отношение оснований трапеции $BC : AD$, если площадь треугольника BCK составляет $9/64$ площади всей трапеции $ABCD$.

9) (ЕГЭ-2018)

Окружность с центром O_1 касается оснований BC и AD и боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Окружность с центром O_2 касается сторон BC, CD и AD. Известно, что $AB = 10,\ BC = 9,\ CD = 30,\ AD = 39$.

а) Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям.

б) Найдите O_1O_2.

10) (ЕГЭ-2017)

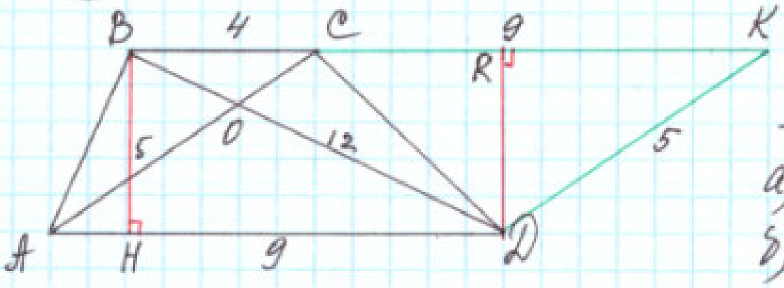
В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точках C и M.

а) Докажите, что $\angle BAM = \angle CAD$.

б) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника AOB, если $AB = \sqrt{10}$, а $BC = 2BM$.

16.3. Четырехугольники (часть 1).

1) ЕГЭ-2017



Дано: ABCD – трапеция (BC ∥ AD)
BC = 4, AD = 9
AC = 5, BD = 12

а) Док-ть: $AC \perp BD$

б) Найти: BH, где $BH \perp AD$.

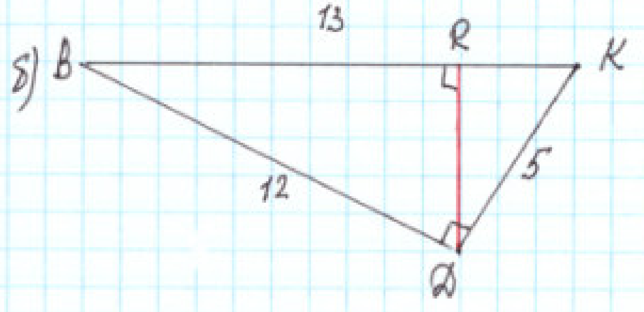
а) Проведем DK ∥ AC, CK ∥ AD. Получим ACKD – параллелограмм, у которого AC = DK = 5, AD = CK = 9. В △ BDK ∠BDK = ∠BOC – угол между диагоналями. Будем искать ∠BDK по теореме косинусов.

$$\cos\angle BDK = \frac{BD^2 + DK^2 - BK^2}{2 \cdot BD \cdot DK}$$

$$\cos\angle BDK = \frac{12^2 + 5^2 - 13^2}{2 \cdot 12 \cdot 5} = \frac{144 + 25 - 169}{2 \cdot 12 \cdot 5} = 0$$

$\cos\angle BDK = 0 \Rightarrow \angle BDK = 90° \Rightarrow AC \perp BD$.

б)



$BH \perp AD$, $DR \perp BK \Rightarrow BH = DR$

$$S_{BDK} = \frac{12 \cdot 5}{2} = \frac{13 \cdot DR}{2}$$

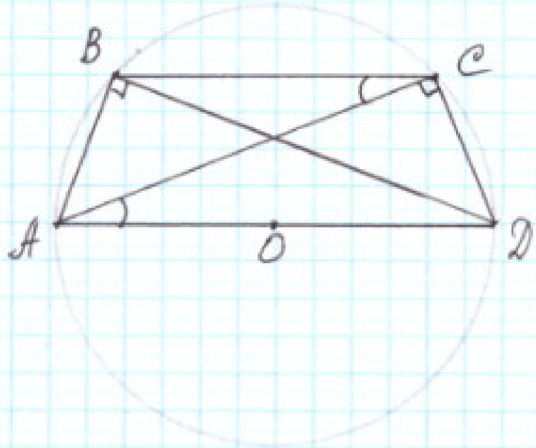
$$DR = \frac{12 \cdot 5}{13} = \frac{60}{13}$$

$$\boxed{BH = \frac{60}{13}}$$

Ответ: б) $\frac{60}{13}$

16.3. Четырехугольники (часть 1)

2 ЕГЭ-2018



Дано: ABCD – трапеция
$BC \parallel AD$
$\angle ABD = \angle ACD = 90°$

а) Док-ть: $AB = CD$

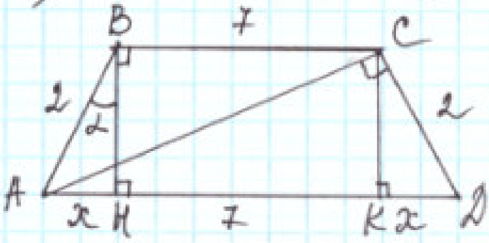
б) Найти: AD, если $AB = 2$, $BC = 7$

а). $BC \parallel AD$ и AC – секущая, значит $\angle ACB = \angle DAC$ как накрест лежащие.

$\triangle ABD = \triangle DCA$ по общей гипотенузе AD и равному острому углу.

Из равенства треугольников следует, что $AB = CD$.

б) $AB = CD = 2$, $BC = 7$, $AD - ?$



$BH \perp AD$, $CK \perp AD$, $AH = KD = x$; $HK = 7$.

$\angle ABH = \alpha$, $\angle ABC = 90° + \alpha$.

$\sin\alpha = \frac{AH}{AB} = \frac{x}{2}$

$\cos\angle ABC = \cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha = -\frac{x}{2}$

По теореме косинусов: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$,

$AC^2 = 4 + 49 - 2\cdot 2\cdot 7\cdot\left(-\frac{x}{2}\right)$; $\boxed{AC^2 = 53 + 14x}$

$\triangle ACD$: $AC^2 = AD^2 - CD^2$; $AC^2 = (2x+7)^2 - 4$; $\boxed{AC^2 = 4x^2 + 28x + 45}$

$4x^2 + 28x + 45 = 53 + 14x$

$4x^2 + 14x - 8 = 0$

$2x^2 + 7x - 4 = 0$

$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49+32}}{4} = \frac{-7 \pm 9}{4}$

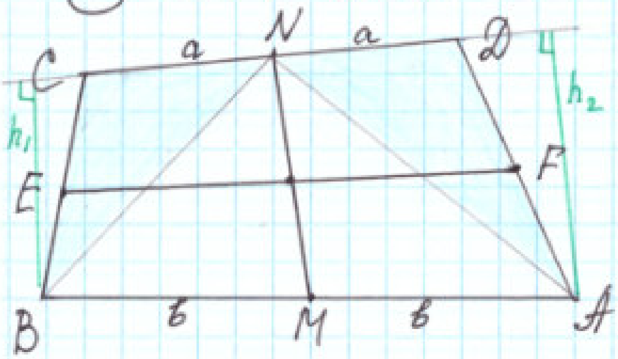
$\left[\begin{array}{l} x = -4 \text{ – не подходит, т.к. } x > 0. \\ x = 0{,}5 \end{array}\right.$

$AH = KD = 0{,}5$, $\boxed{AD = 8}$ AD – диаметр окружности описанной около ABCD.

Ответ: б) 8

16.3. Четырехугольники (часть 1)

3 ЕГЭ-2016

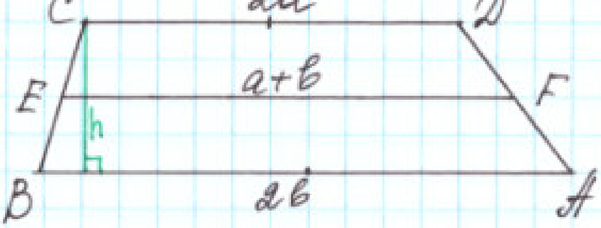


Дано: ABCD-четырехугольник
M- середина AB
N- середина CD
E- середина BC
F- середина AD
$S_{MBCN}=S_{MADN}$; $\frac{S_{ECDF}}{S_{BEFA}}=\frac{11}{17}$

а) Док-ть: ABCD-трапеция
б) Найти: отношение оснований.

а). Пусть $CN=ND=a$, $BM=AM=в$. NM- медиана ΔABN, $S_{BMN}=S_{AMN}$ и $S_{MBCN}=S_{MADN}$, значит $S_{BCN}=S_{NAD}$, т.е. $\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_1=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_2 \Rightarrow h_1=h_2$, а это возможно только тогда, когда $CD \parallel AB$, т.е. ABCD-трапеция.

б)



$CD=2a$, $AB=2в$, h-высота
EF-средняя линия
$EF=\frac{2a+2в}{2}=a+в$.

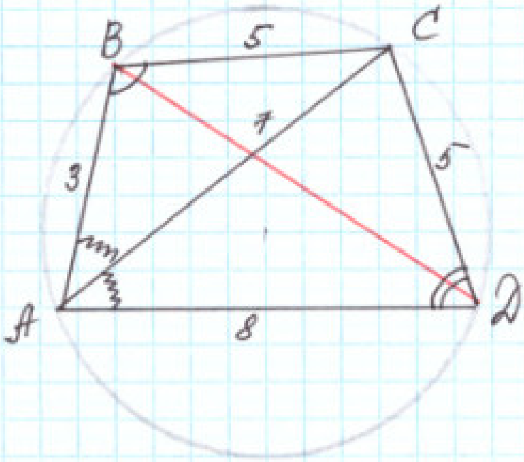
$$\frac{S_{ECDF}}{S_{BEFA}}=\frac{\frac{2a+a+в}{2}\cdot\frac{1}{2}h}{\frac{2в+a+в}{2}\cdot\frac{1}{2}h}=\frac{3a+в}{a+3в}=\frac{11}{17}$$

$$51a+17в=11a+33в$$
$$40a=16в$$
$$5a=2в$$
$$\frac{a}{в}=\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{2a}{2в}=\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{CD}{AB}=\frac{2}{5}.$$

Ответ: б) $\frac{2}{5}$

16.3. Четырехугольники (часть 1).

④ ЕГЭ-2018



Дано: $ABCD$ - выпуклый 4уг-к
$AB=3$, $BC=CD=5$
$AD=8$, $AC=7$

а) Док-ть: можно описать окр-ть около $ABCD$.

б) Найти: BD.

а) $\triangle ABC$: $\cos\angle B = \dfrac{BC^2+AB^2-AC^2}{2\cdot BC\cdot AB}$

(по следствию из теоремы косинусов).

$\cos\angle B = \dfrac{5^2+3^2-7^2}{2\cdot5\cdot3} = \dfrac{25+9-49}{2\cdot5\cdot3} = -\dfrac{15}{2\cdot15} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \angle B = 120^\circ$

$\triangle ACD$: (аналогично)

$\cos\angle D = \dfrac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot5\cdot8} = \dfrac{25+64-49}{2\cdot5\cdot8} = \dfrac{40}{2\cdot40} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \angle D = 60^\circ$

Т.к. $\angle B + \angle D = 180^\circ$, то около $ABCD$ можно описать окр-ть.

б) $BC = CD \Rightarrow \angle BAC = \angle DAC$ как вписанные, опирающиеся на равные хорды.

$\triangle ABC$ вписан в окружность, поэтому по следствию из теоремы синусов: $\dfrac{BC}{\sin\angle BAC} = 2R$, где R - радиус описанной окружности.

$\dfrac{5}{\sin\angle BAC} = 2R$, но и $\dfrac{AC}{\sin\angle ABC} = 2R$; $\dfrac{5}{\sin\angle BAC} = \dfrac{7}{\sin 120^\circ}$;

$\sin\angle BAC = \dfrac{5\sqrt3}{2\cdot7} = \dfrac{5\sqrt3}{14}$; $\cos\angle BAC = \sqrt{1-\dfrac{75}{196}} = \sqrt{\dfrac{121}{196}} = \dfrac{11}{14}$

$\sin\angle BAD = \sin(2\cdot\angle BAC) = 2\sin\angle BAC\cdot\cos\angle BAC = 2\cdot\dfrac{5\sqrt3}{14}\cdot\dfrac{11}{14} = \dfrac{55\sqrt3}{14\cdot7}$

$\dfrac{5}{\sin\angle BAC} = 2R$, $2R = \dfrac{5\cdot14}{5\sqrt3} = \dfrac{14}{\sqrt3}$

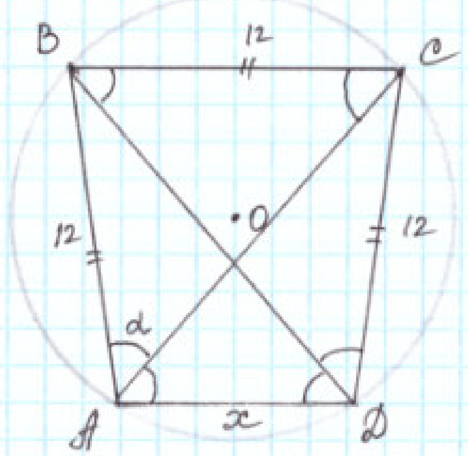
$\triangle ABD$ вписан в окружность, значит $\dfrac{BD}{\sin\angle BAD} = 2R$

$BD = 2R\cdot\sin\angle BAD = \dfrac{14\cdot55\sqrt3}{\sqrt3\cdot14\cdot7} = \dfrac{55}{7}$ $\boxed{BD = \dfrac{55}{7}}$

Ответ: б) $\dfrac{55}{7}$

16.3 Четырехугольники (часть 1)

(5) ЕГЭ-2018



Дано: ABCD - 4уг-к вписан в окр-ть
$R=8$, R - радиус окр-ти.
$AB=BC=CD=12$

а) Док-ть: $BC \parallel AD$
б) Найти: AD

а) $\triangle ABC$ - равнобедренный, т.к. $AB=BC \Rightarrow \angle BAC = \angle BCA$
$\angle CAD = \angle BCA$ - как вписанные, опирающиеся на равные хорды AB и CD.
$\angle CAD$ и $\angle BCA$ - накрест лежащие для BC и AD и AC секущей, поэтому $BC \parallel AD$.
ABCD - равнобедренная трапеция.

б) Пусть $AD = x$, $\angle BAC = \alpha$.
$\triangle ABC$ вписан в окружность, $\frac{BC}{\sin\alpha} = 2R$, $\sin\alpha = \frac{12}{2\cdot 8} = \frac{3}{4}$
$\cos\alpha = +\sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ($\cos\alpha > 0$, т.к. $\angle A + \angle C = 180° \Rightarrow 3\alpha < 180°$)
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{2\cdot 3\cdot\sqrt{7}}{4\cdot 4} = \frac{3\sqrt{7}}{8} \Rightarrow \cos 2\alpha = \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{1}{8}$
$\triangle ABD$: по теореме косинусов $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB\cdot AD\cdot\cos 2\alpha$
$\frac{BD}{\sin 2\alpha} = 2R$, $BD = 2\cdot 8\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8} = 6\sqrt{7}$

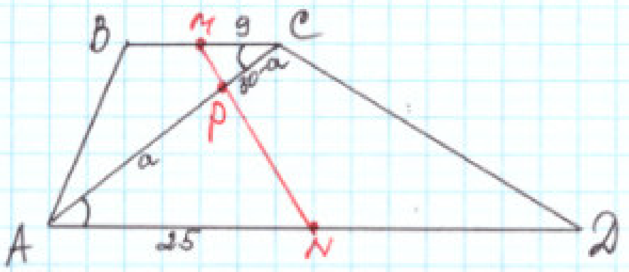
$$(6\sqrt{7})^2 = 12^2 + x^2 - 2\cdot 12\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)$$
$$252 = 144 + x^2 + 3x$$
$$x^2 + 3x - 108 = 0$$
$$x = \frac{-3 \pm\sqrt{9+432}}{2} = \frac{-3\pm\sqrt{441}}{2} = \frac{-3\pm 21}{2}$$
$\left[\begin{array}{l} x=-12 \text{ - не подходит} \\ x = 9 \end{array}\right.$

$x = 9$, $\boxed{AD = 9}$

Ответ: б) 9

16.3. Четырехугольники (часть 1).

6 ЕГЭ-2014



Дано: $ABCD$ – трапеция
$BC \parallel AD$, $AD > BC$
$\triangle ABC$ и $\triangle ACD$ подобны.

а) Док-ть: $\angle ABC = \angle ACD$.

б) Найти: MN, если $\cos\angle CAD = 0{,}6$
$BC = 18$, $AD = 50$
M – середина BC
N – середина AD.

а). $\angle BAC = \angle CAD$ как внутренние накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AC.

Если AC разбивает трапецию на два подобных треугольника, то возможны только такие варианты: $\triangle ABC \sim \triangle CDA$
$\triangle ABC \sim \triangle DCA$

1 вариант: $\frac{AB}{CD} = \frac{BC}{DA} = \frac{AC}{CA} = 1 \Rightarrow BC = AD$, а это неверно.

2 вариант: $\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{CA} = \frac{AC}{DA} \Rightarrow \angle ABC = \angle ACD$, ч.т.д.

б) Из подобия $\triangle ABC$ и $\triangle DCA$ следует: $AC^2 = BC \cdot AD$

$AC^2 = 18 \cdot 50$; $AC = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 25} = 3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$ $\boxed{AC = 30}$

$MN \cap AC = P$. Пусть $AP = a$, $PC = 30 - a$.

$\triangle APN \sim \triangle CPM$ по двум углам $\Rightarrow \frac{AP}{CP} = \frac{AN}{CM}$; $\frac{a}{30-a} = \frac{25}{9}$

$9a = 25 \cdot 30 - 25a$; $34a = 25 \cdot 30$ $a = \frac{25 \cdot 15}{17}$ $\boxed{AP = \frac{25 \cdot 15}{17}}$

$PC = 30 - \frac{25 \cdot 15}{17} = \frac{15 \cdot 2 \cdot 17 - 25 \cdot 15}{17} = \frac{15(34-25)}{17} = \frac{15 \cdot 9}{17}$ $\boxed{PC = \frac{15 \cdot 9}{17}}$

В $\triangle APN$ (по теореме косинусов)

$PN = \sqrt{AP^2 + AN^2 - 2 \cdot AP \cdot AN \cdot \cos\angle A}$

$PN = \sqrt{\frac{25^2 \cdot 15^2}{17^2} + 25^2 - 2 \cdot \frac{25 \cdot 15 \cdot 25 \cdot 6}{17 \cdot 10}} = 25\sqrt{\frac{15^2}{17^2} + 1 - \frac{9 \cdot 2}{17}} = \frac{25}{17}\sqrt{225 - 17} =$

$= \frac{25 \cdot \sqrt{208}}{17} = \frac{25 \cdot 4\sqrt{13}}{17} = \frac{100\sqrt{13}}{17}$ $\boxed{PN = \frac{100\sqrt{13}}{17}}$

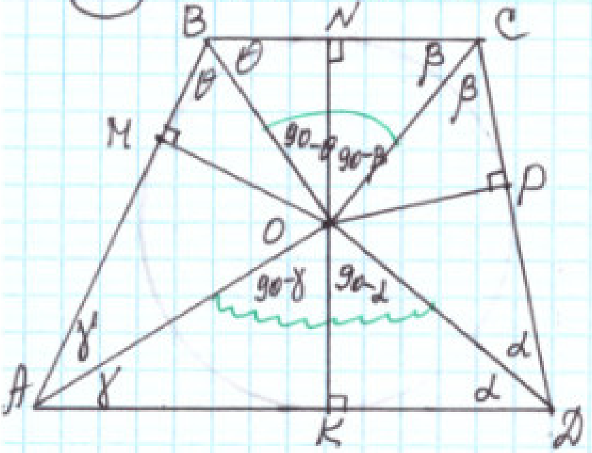
$\frac{MP}{PN} = \frac{9}{25} \Rightarrow MP = \frac{9 \cdot 100\sqrt{13}}{25 \cdot 17} = \frac{36\sqrt{13}}{17}$ $\boxed{MP = \frac{36\sqrt{13}}{17}}$

$MN = MP + PN = \frac{36\sqrt{13}}{17} + \frac{100\sqrt{13}}{17} = \frac{136\sqrt{13}}{17} = 8\sqrt{13}$ $\boxed{MN = 8\sqrt{13}}$

Ответ: б) $8\sqrt{13}$

16.3 Четырехугольники (часть 1)

7 ЕГЭ - 2015



Дано: ABCD - трапеция
$AD \parallel BC$
O - центр вписанной окр.

а) Док-ть: $\sin\angle AOD = \sin\angle BOC$.

б) Найти: S_{ABCD}, если
$\angle BAD = 90°$, $BC = 5$, $AD = 7$

а) M, N, P, K - точки касания, $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp CD$, $OK \perp AD$. Тогда $AM = AK$, $BM = BN$, $CN = CP$, $DK = DP$.

Пусть $\angle KDO = \angle PDO = \alpha$, $\angle PCO = \angle NCO = \beta$, тогда
$2\alpha + 2\beta = 180°$; $\alpha + \beta = 90°$, $\boxed{\alpha = 90° - \beta}$

$\angle KOD = 90° - \alpha$, $\angle CON = 90° - \beta$.

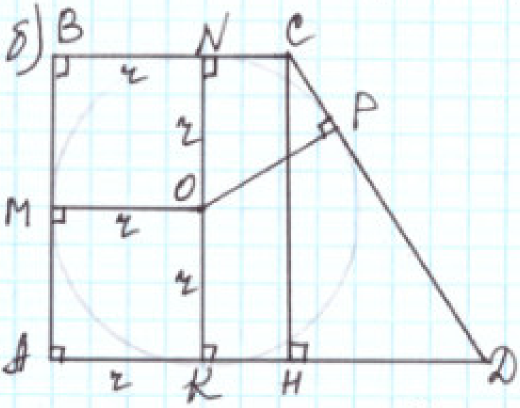
Пусть $\angle KAO = \angle MAO = \gamma$, $\angle MBO = \angle NBO = \theta$, тогда
$2\gamma + 2\theta = 180°$, $\gamma + \theta = 90°$, $\boxed{\gamma = 90° - \theta}$

$\angle AOD = \angle AOK + \angle KOD = 90 - \gamma + 90 - \alpha = 180° - (\alpha + \gamma)$.

$\angle BOC = \angle BON + \angle CON = 90 - \theta + 90 - \beta = 180° - (\beta + \theta)$

$\sin\angle AOD = \sin(180° - (\alpha+\gamma)) = \sin(\alpha+\gamma) = \sin(90° - \beta + 90° - \theta) =$
$= \sin(180° - (\beta+\theta)) = \sin\angle BOC \Rightarrow \sin\angle AOD = \sin\angle BOC$.

б)



Пусть r - радиус окружности
$OM = ON = OP = OK = AM = AK = BM = BN = r$

$BC = 5$, $NC = 5 - r = CP$
$AD = 7$, $KD = 7 - r = PD$ | $CD = 5 - r + 7 - r = 12 - 2r$

$CH \perp AD$, $CH = 2r$, $HD = 7 - 5 = 2$.

$\triangle CHD$: $CD^2 = CH^2 + HD^2$; $(12 - 2r)^2 = (2r)^2 + 2^2$; $144 - 48r + 4r^2 = 4r^2 + 4$

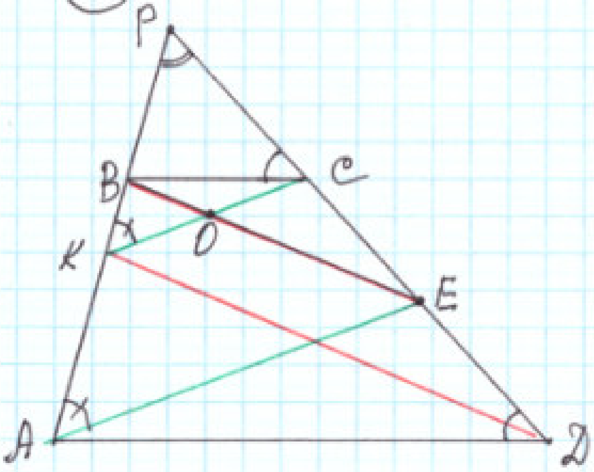
$48r = 140$, $r = \frac{35}{12}$, $CH = 2r = \frac{35}{6}$

$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CH = \frac{5+7}{2} \cdot \frac{35}{6} = 35$ $\boxed{S_{ABCD} = 35}$

Ответ: б) 35

16.3 Четырехугольники (часть 1)

8 ЕГЭ – 2017



Дано: $ABCD$ – трапеция, $BC \parallel AD$
E – середина CD
$K \in AB$, $CK \parallel AE$
$BE \cap CK = O$

а) Док-ть: $CO = KO$

б) Найти: $\frac{BC}{AD}$, если
$S_{BCK} = \frac{9}{64} S_{ABCD}$

а) Пусть $AB \cap CD = P$.

$BC \parallel AD$, $\triangle PBC \sim \triangle PAD$ по двум углам

$\frac{PB}{PA} = \frac{PC}{PD} \Rightarrow PC = \frac{PB \cdot PD}{PA}$ (1)

$KC \parallel AE$, $\triangle PKC \sim \triangle PAE$ по двум углам

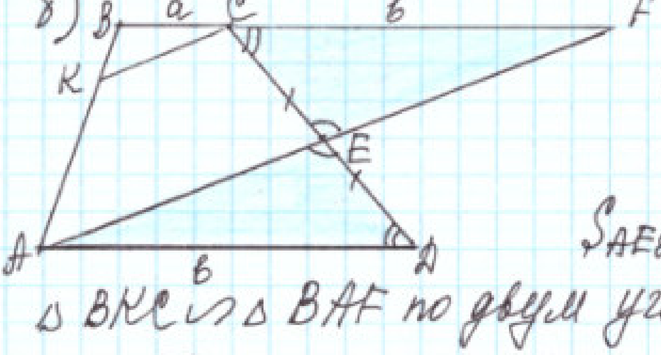
$\frac{PK}{PA} = \frac{PC}{PE} \Rightarrow PC = \frac{PK \cdot PE}{PA}$ (2)

$\frac{PB \cdot PD}{PA} = \frac{PK \cdot PE}{PA} \Rightarrow PB \cdot PD = PK \cdot PE \Rightarrow \frac{PK}{PB} = \frac{PD}{PE}$ (3)

В $\triangle PKD$ и $\triangle PBE$ $\angle P$ – общий и стороны пропорциональны (3), значит эти треугольники подобны, поэтому все их соответственные углы равны, а $BE \parallel KD$.

В $\triangle CKD$: E – середина CD, $OE \parallel KD$, значит по теореме Фалеса O – середина KC, т.е. $CO = KO$.

б)



Пусть $BC = a$, $AD = b$, $AE \cap BC = F$.
$\triangle AED = \triangle FEC$ по стороне $CE = ED$ и двум прилежащим к ней углам.

$S_{AED} = S_{FEC} \Rightarrow S_{ABCD} = S_{ABF}$;

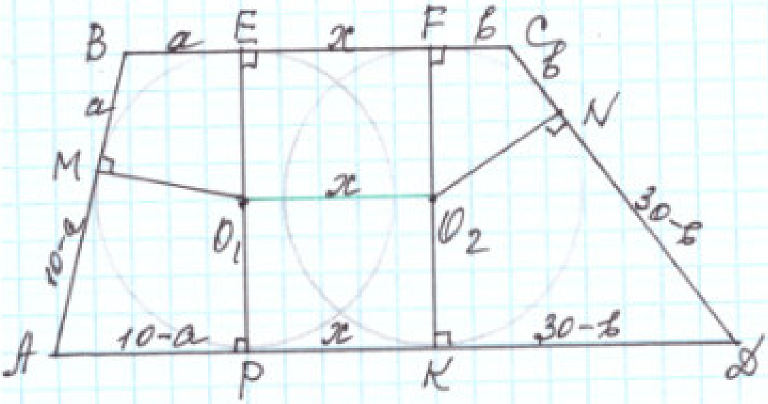
$\triangle BKC \sim \triangle BAF$ по двум углам, $\frac{S_{BKC}}{S_{BAF}} = \frac{9}{64} = \left(\frac{3}{8}\right)^2$, где $k = \frac{3}{8}$ коэф. подобия.

$k = \frac{BC}{BF}$; $\frac{a}{a+b} = \frac{3}{8}$; $8a = 3a + 3b$, $5a = 3b$, $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$; $\boxed{\frac{BC}{AD} = \frac{3}{5}}$

Ответ: б) $\frac{3}{5}$

16.3. Четырехугольники (часть 1)

9 ЕГЭ - 2018



Дано: $ABCD$ - трапеция
$BC \parallel AD$
O_1 - центр окр. ω_1
ω_1 касается BC, AD, AB
O_2 - центр окр. ω_2
ω_2 касается BC, AD, AD
$AB = 10, BC = 9$
$CD = 30, AD = 39$

а) Док-ть: $O_1O_2 \parallel BC \parallel AD$.

б) Найти: O_1O_2.

а) $O_1E \perp BC$, $O_1P \perp AD$, $O_1E = O_1P = r$, PE - высота трапеции.
$O_2F \perp BC$, $O_2K \perp AD$, $O_2F = O_2K = r$, KF - высота трапеции.
Точки O_1 и O_2 находятся на одинаковом расстоянии от прямой AD, значит $O_1O_2 \parallel AD$ (точки O_1 и O_2 различны).

б) Пусть $O_1O_2 = x$, тогда $EF = x$, $PK = x$.
Пусть $BE = BM = a$, $FC = CN = b$, тогда
$AM = AP = 10 - a$, $DN = DK = 30 - b$

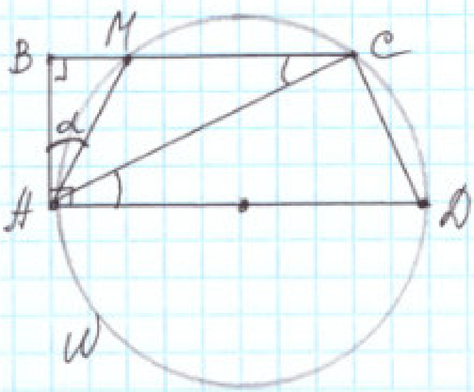
$$BC = 9 \Rightarrow \begin{cases} a + b + x = 9 \\ 10 - a + 30 - b + x = 39 \end{cases} \Leftarrow AD = 39 \qquad \begin{cases} a + b = 9 - x \\ a + b = 1 + x \end{cases} \Rightarrow$$

$9 - x = 1 + x$, $2x = 8$, $x = 4$, т.е. $\boxed{O_1O_2 = 4}$

Ответ: б) 4

16.3. Четырехугольники (часть 1)

10 ЕГЭ-2017.



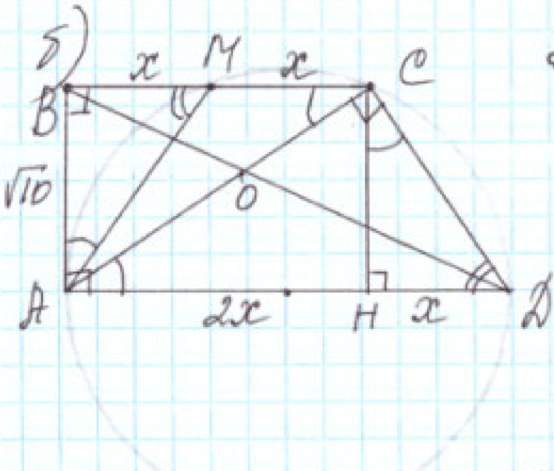
Дано: $ABCD$ - трапеция, $AD \parallel BC$.
AD - диаметр окружности ω
$C \in \omega$; $BC \cap \omega = M$.

а) Док-ть: $\angle BAM = \angle CAD$

б) Найти: S_{AOB}, если $AC \cap BD = O$, $AB = \sqrt{10}$; $2BM = BC$.

а). Пусть $\angle BAM = \alpha$, AB - касательная к ω, т.к. $AB \perp AD$, AM - хорда. $\angle BAM$ - угол между касательной и хордой $\Rightarrow \angle BAM = \frac{1}{2} \smile AM$.
$\angle ACM = \frac{1}{2} \smile AM$, как вписанный, опирается на $\smile AM$.
$\angle ACM = \angle CAD$, как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AC. Получаем: $\angle BAM = \angle ACM = \angle CAD = \alpha$
$\angle BAM = \angle CAD$, ч.т.д.

б)



Пусть $BM = x$, тогда $BC = 2x$, $AB = \sqrt{10}$.
$CH \perp AD$, $CH = \sqrt{10}$.
$\triangle ACD$: $\angle CAD = \alpha$, $\angle ADC = 90^\circ - \alpha$.
$\triangle ABM$: $\angle BAM = \alpha$, $\angle AMB = 90^\circ - \alpha$.
$\triangle ABM = \triangle CHD$ по катету и углу.
$HD = BM = x$, $AH = BC = 2x$, $AD = 3x$.

$AM = \sqrt{x^2+10}$; $AC = \sqrt{4x^2 + \sqrt{10}^2} = \sqrt{4x^2+10}$

$\sin\alpha = \frac{BM}{AM} = \frac{AB}{AC}$; $\frac{x}{\sqrt{x^2+10}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{4x^2+10}}$; $\frac{x^2}{x^2+10} = \frac{10}{4x^2+10}$;

$4x^4 + 10x^2 = 10x^2 + 100$; $x^4 = 25$, $x^2 = 5$, $\boxed{x = \sqrt{5}}$

$S_{AOB} = S_{ABC} - S_{BOC} = \frac{AB \cdot BC}{2} - \frac{BC \cdot OC \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{5}}{2} - \frac{2\sqrt{5} \cdot OC \sin\alpha}{2} =$

$= 5\sqrt{2} - \sqrt{5} \cdot \frac{2}{5} AC \cdot \frac{BM}{AM} = 5\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{30} \cdot \sqrt{5}}{5 \cdot \sqrt{15}} = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Ответ: б) $3\sqrt{2}$

Задание №16.3. Ответы.

1) $\frac{60}{13}$.

2) 8.

3) 5 : 2.

4) $\frac{55}{7}$.

5) 9.

6) $8\sqrt{13}$.

7) 35.

8) $\frac{3}{5}$.

9) 4.

10) $3\sqrt{2}$.

Задание №16.4. Четырехугольники (часть 2).

1) (ЕГЭ-2015)

К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.

б) Прямая MN пересекает прямую CD в точке P. В каком отношении делит сторону BC прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AM : MB = 1 : 2$?

2) (ЕГЭ-2015)

Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. На стороне AB как на диаметре построена окружность с центром в точке O, касающаяся стороны CD и повторно пересекающая основание AD в точке H. Точка Q — середина стороны CD.

а) Докажите, что $OQDH$ — параллелограмм.

б) Найдите AD, если $\angle BAD = 60^\circ$, $BC = 2$.

3) (ЕГЭ-2015)

Точка M лежит на стороне BC выпуклого четырехугольника $ABCD$, причем B и C — вершины равнобедренных треугольников с основаниями AM и DM соответственно, а прямые AM и DM перпендикулярны.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырехугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD.

б) Пусть N — точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если известно, что $BM : MC = 1 : 3$, а площадь четырехугольника, стороны которого лежат на прямых AM, DM, BN и CN, равна 18.

4) (ЕГЭ-2015)

Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P, причем $BC = CD$.

а) Докажите, что $AB : BC = AP : PD$.

б) Найдите площадь треугольника COD, где O — центр окружности, вписанной в треугольник ABD, если дополнительно известно, что BD — диаметр описанной около четырехугольника $ABCD$ окружности, $AB = 6$, а $BC = 6\sqrt{2}$.

5) (ЕГЭ-2016)

Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника $ABCD$, перпендикулярна диагонали AC и пересекает сторону AD в точке M, равноудаленной от вершин B и D.

а) Докажите, что лучи BM и BD делят угол B на три равных угла.

б) Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$ до прямой CM, если $BC = 6\sqrt{21}$.

6) (ЕГЭ-2016)

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение $BH : ED$, если $\angle BCD = 135^\circ$.

7) (ЕГЭ-2017)

Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$, касается её боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Известно, что $AM = 8MB$ и $DN = 2CN$.

а) Докажите, что $AD = 4BC$.

б) Найдите длину отрезка MN, если радиус окружности равен $\sqrt{6}$.

8) (ЕГЭ-2018)

Окружность проходит через вершины A, B и D параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC в точках B и M, а продолжение стороны CD за точку D в точке N.

а) Докажите, что $AM = AN$.

б) Найдите отношение $CD : DN$, если $AB : BC = 1 : 3$, а $\cos\angle BAD = \dfrac{2}{5}$.

9) (ЕГЭ-2018)

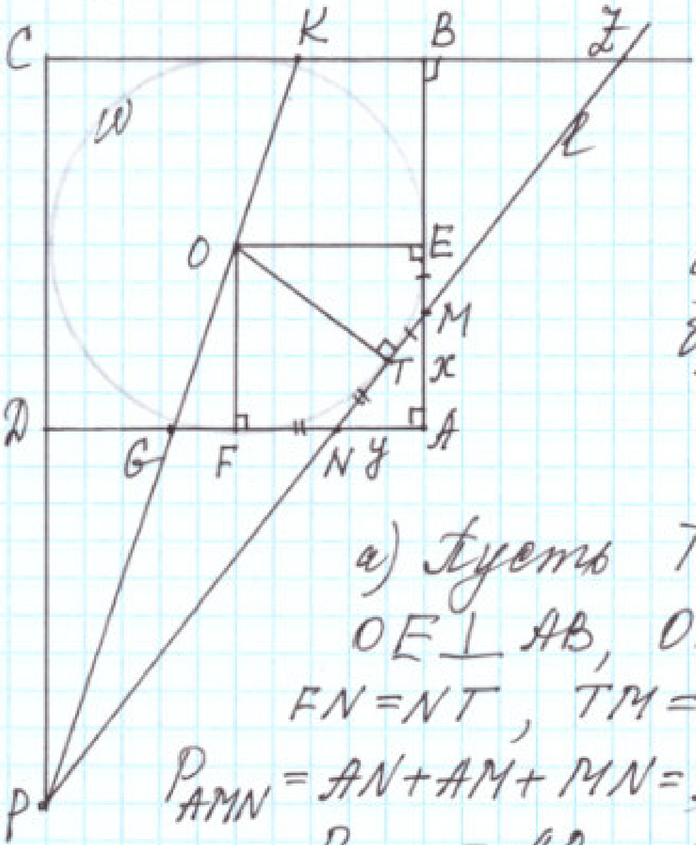
Окружность высекает на сторонах трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC равные отрезки. Эта окружность пересекает боковую сторону AB в точках K и L.

а) Докажите, что биссектрисы углов трапеции пересекаются в центре этой окружности.

б) Найдите высоту трапеции, если длины отрезков $AK = 6,\ AL = 10,\ BL = 2$.

16.4. Четырехугольники (часть 2)

(1) ЕГЭ – 2015



Дано: $ABCD$ – квадрат
ω – окружность вписана в квадрат.
ℓ – касательная к ω
$\ell \cap AB = M$; $\ell \cap AD = N$

а) Док-ть: $P_{AMN} = AB$.

б) Найти: $BK : KC$, если $MN \cap CD = P$, $PO \cap CB = K$
$AM : MB = 1 : 2$

а) Пусть T – точка касания MN и ω.

$OE \perp AB$, $OF \perp AD$, $OT \perp MN$.

$FN = NT$, $TM = ME$ (по свойству касательных)

$P_{AMN} = AN + AM + MN = AN + AM + MT + NT = AF + AE = AB$.

$P_{AMN} = AB$, ч.т.д.

б) $AM : MB = 1:2$, пусть $AM = x$, $MB = 2x$, $AB = 3x$.

Пусть $AN = y$. $\triangle AMN$: $MN = \sqrt{x^2+y^2}$

$P_{AMN} = x + y + \sqrt{x^2+y^2}$, $P_{AMN} = 3x$.

$x + y + \sqrt{x^2+y^2} = 3x$; $\sqrt{x^2+y^2} = 2x - y$; $x^2 + y^2 = 4x^2 - 4xy + y^2$

$4xy = 3x^2$, $x \neq 0 \Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{4}x}$

$AN = \frac{3}{4}x$, $DN = 3x - \frac{3}{4}x = \frac{9}{4}x$. $\quad \ell \cap CB = Z$

$\triangle AMN \sim \triangle BMZ$ по двум углам: $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{BZ}$,

$BZ = \frac{2x \cdot 3x}{x \cdot 4} = \frac{3x}{2} \Rightarrow CZ = 3x + \frac{3}{2}x = \frac{9}{2}x$

$\triangle PND \sim \triangle PZC$ по двум углам: $\frac{DN}{CZ} = \frac{PD}{PC}$,

$\frac{PD}{PC} = \frac{9x \cdot 2}{4 \cdot 9x} = \frac{1}{2} \Rightarrow PC = 3x + 3x = 6x$.

$\triangle PDG \sim \triangle OFG$: $\frac{PD}{OF} = \frac{DG}{FG}$; $\frac{DG}{FG} = \frac{3x}{1{,}5x} = \frac{2}{1} \Rightarrow \begin{matrix} DG = x \\ FG = 0{,}5x \end{matrix}$

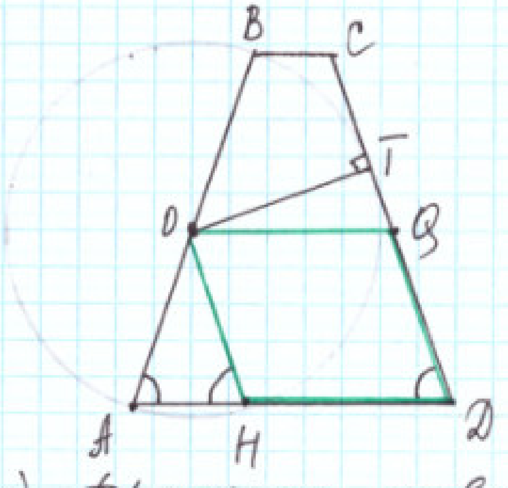
$\triangle PDG \sim \triangle PCK$: $\frac{PD}{PC} = \frac{DG}{CK}$; $\frac{3x}{6x} = \frac{x}{CK} \Rightarrow CK = 2x \Rightarrow BK = x$

$\boxed{BK : KC = 1:2}$

Ответ: б) 1:2

16.4 Четырехугольники (часть 2).

② ЕГЭ - 2015

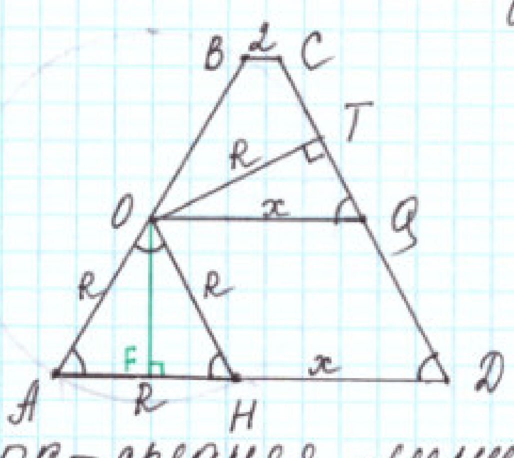


Дано: $ABCD$ – трапеция, $BC \parallel AD$
$AB = CD$
AB – диаметр окружности
O – центр окружности
Окр. касается CD.
Окр. $\cap AD = H$.
Q – середина CD.

а) Док-ть: $OQDH$ – параллелограмм
б) Найти: AD, если $\angle BAD = 60°$; $BC = 2$

а) Трапеция равнобедренная, значит $\angle BAD = \angle CDA$.
$\triangle AOH$ – равнобедренный ($AO = HO = R$), значит $\angle OAH = \angle OHA$.
Поэтому $\angle QDA = \angle OHA$, т.е. $QD \parallel OH$.
O – середина AB, Q – середина CD, значит $OQ \parallel AD$.
Получаем: $OQ \parallel HD$ и $OH \parallel QD$, значит
$OQDH$ – параллелограмм.

б) $\angle BAD = 60°$; $BC = 2$. Пусть $OA = OH = OT = R$.
$OQ = HD = x$.



$\triangle OAH$ – равносторонний, т.к. $\angle OAH = 60°$.
$OF = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, $FH = \frac{R}{2}$
$\triangle OFH \sim \triangle OTQ$ по двум углам.
$\frac{OF}{OT} = \frac{OH}{OQ}$; $\frac{R\sqrt{3}}{2 \cdot R} = \frac{R}{x}$; $\boxed{R = \frac{x\sqrt{3}}{2}}$

OQ – средняя линия трапеции: $OQ = \frac{BC + AD}{2}$
$2x = 2 + R + x$, $\boxed{R = x - 2}$

$x - 2 = \frac{x\sqrt{3}}{2}$; $2x - 4 = x\sqrt{3}$, $x(2 - \sqrt{3}) = 4$, $x = \frac{4}{2 - \sqrt{3}}$

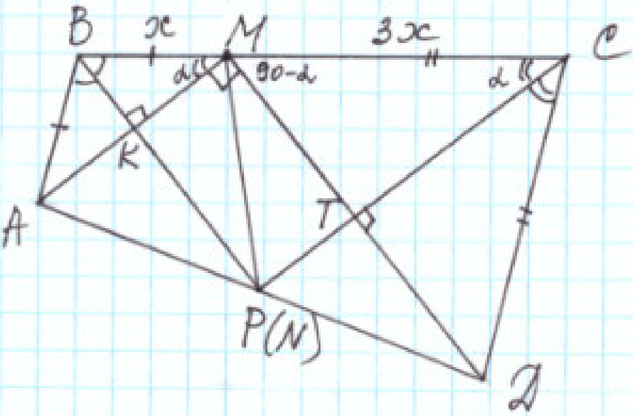
$x = \frac{4(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{4 - 3} = 8 + 4\sqrt{3}$ $\boxed{x = 8 + 4\sqrt{3}}$

$AD = R + x = x - 2 + x = 2(8 + 4\sqrt{3}) - 2 = 14 + 8\sqrt{3}$; $\boxed{AD = 14 + 8\sqrt{3}}$

Ответ: б) $14 + 8\sqrt{3}$

16.4 Четырехугольники (часть 2)

(3) ЕГЭ – 2015



Дано: $ABCD$ – выпуклый 4уг-к
$M \in BC$
$BM = BA$; $CM = CD$
$AM \perp MD$

а) Док-ть: биссектрисы $\angle B$ и $\angle C$ пересекаются на AD.

б) Найти: S_{ABCD}, если $BM : MC = 1 : 3$; $S_1 = 18$

а). $\triangle ABM$ – равнобедренный, $BM = BA$, поэтому биссектриса $\angle B$ будет еще и высотой, и медианой, т.е. $BK \perp AM$, K – середина AM.
Аналогично $CT \perp MD$ и T – середина MD.
Пусть $BK \cap CT = P$. $MTPK$ – прямоугольник.
$KP \parallel MT$, K – середина $AM \Rightarrow P$ – середина AD.
$TP \parallel MK$, T – середина $MD \Rightarrow P$ – середина AD.
Получается, что точка пересечения BK и CT лежит на стороне AD, ч.т.д.

б) $BM : MC = 1 : 3$. Пусть $BM = x$, $MC = 3x$
Теперь $BK \cap CT = N$. $S_1 = S_{MTNK} = 18$. Пусть $\angle BMK = \alpha$.
$S_{MNK} = S_{MTN} = S_{DTN} = S_{AKN} = 9 \Rightarrow S_{AMD} = 9 \cdot 4 = 36$

$S_{MTNK} = MK \cdot MT = x \cdot \cos\alpha \cdot 3x \cdot \sin\alpha = 3x^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 18$

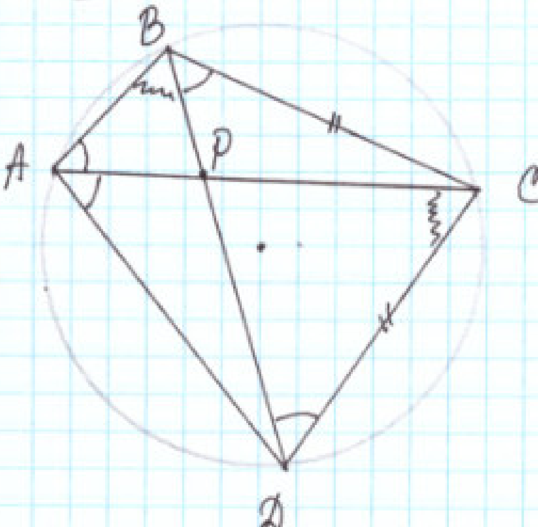
$\boxed{x^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 6}$

$S_{ABM} = 2 \cdot S_{BKM} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BM \cdot MK \cdot \sin\alpha = x \cdot x \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha = 6$
$S_{CMD} = 2 \cdot S_{CMT} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot MC \cdot MT \cdot \sin(90° - \alpha) = 3x \cdot 3x \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 9 \cdot 6 = \boxed{54}$
$S_{ABCD} = S_{AMD} + S_{ABM} + S_{CMD} = 36 + 6 + 54 = 96.$

Ответ: б) 96

16.4. Четырехугольники (часть 2)

4) ЕГЭ - 2015

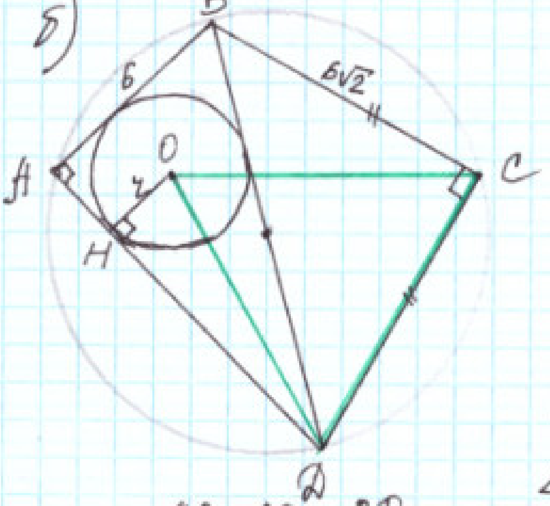


Дано: $ABCD$ - 4уг-к, вписан в окр-ть
$AC \cap BD = P$
$BC = CD$

а) Док-ть: $AB : BC = AP : PD$
б) Найти: S_{COD}, если $AB = 6$, $BC = 6\sqrt{2}$, BD-диаметр окр., O-центр окр., впис. в ΔABD

а). $BC = CD$, значит $\angle CBD = \angle CDB$, $\smile BC = \smile CD$
На эти равные дуги опираются еще два вписанных угла: $\angle BAC = \angle DAC$.
$\angle ABD = \angle ACD$ как вписанные, опирающиеся на $\smile AD$.
$\Delta ABP \sim \Delta DCP$ по двум углам.
$\frac{AB}{CD} = \frac{AP}{PD}$, но $CD = BC$, и значит $\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{PD}$ ч.т.д.

б)



BD-диаметр, $BC = CD = 6\sqrt{2}$,
$\angle BCD = 90°$, $BD = 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 12$.
ΔABD: $\angle BAD = 90°$, $AB = 6$, $BD = 12$,
$\angle ADB = 30°$, $\angle ABD = 60°$.
$AD = BD \cdot \cos 30° = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.
DO- биссектриса, $\angle ODB = \frac{30°}{2} = 15°$
$\angle BDC = \angle CBD = \frac{90°}{2} = 45° \Rightarrow \boxed{\angle ODC = 60°}$

$r = \frac{AB + AD - BD}{2}$, $r = \frac{6 + 6\sqrt{3} - 12}{2} = 3\sqrt{3} - 3$, $OH = r$, $OH \perp AD$.

ΔOHD: $HD = AD - r = 6\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3 = 3\sqrt{3} + 3$

$OD = \sqrt{OH^2 + HD^2} = \sqrt{(3\sqrt{3}-3)^2 + (3\sqrt{3}+3)^2} = \sqrt{27 + 9 - 18\sqrt{3} + 27 + 9 - 18\sqrt{3}}$

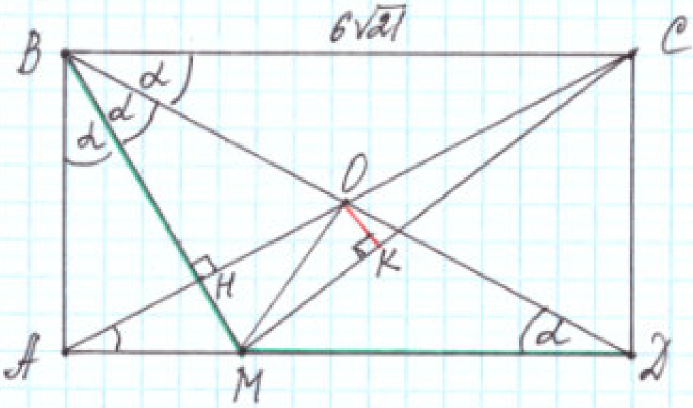
$OD = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$. $S_{COD} = \frac{1}{2} \cdot OD \cdot CD \cdot \sin\angle ODC = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{S_{COD} = 18\sqrt{3}}$

Ответ: б) $18\sqrt{3}$

16.4. Четырехугольники (часть 2)

5 ЕГЭ-2016



Дано: $ABCD$ — прямоугольник
$BM \perp AC$, $M \in AD$
$BM = MD$

а) Док-ть: $\angle ABM = \angle MBD = \angle DBC$

б) Найти: $\rho(O; CM)$, если $O = AC \cap BD$, $BC = 6\sqrt{21}$.

а) Пусть $\angle MBD = \alpha$, тогда $\angle BDM = \alpha$, т.к. $BM = MD$

$\angle CBD = \alpha$, как накрест лежащий с $\angle BDA$.

$\triangle BHO$, $BH \perp AC$, $\angle BOH = 90° - \alpha$; $AC \cap BD = O$.

$\triangle AOB$ — равнобедренный, т.к. $BO = OA$, значит

$\angle OBA = \angle OAB = \dfrac{180° - (90° - \alpha)}{2} = \dfrac{90° + \alpha}{2}$

$\angle OBA + \angle OBC = 90°$, $\dfrac{90° + \alpha}{2} + \alpha = 90°$; $90° + \alpha + 2\alpha = 180°$

$3\alpha = 90°$, $\boxed{\alpha = 30°}$, т.е. $\angle ABM = \angle MBD = \angle DBC = 30°$.

б) $OK \perp CM$, $\rho(O; CM) = OK$.

$BC = 6\sqrt{21}$, $tg\, 30° = \dfrac{CD}{BC}$, $CD = 6\sqrt{21} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{7}$, $BD = 12\sqrt{7}$

$OC = BO = 6\sqrt{7}$; BH — высота и биссектриса => BH — мед.

MH — высота и медиана => $AM = OM$, $AH = OH = 3\sqrt{7}$

$\angle AMH = 60°$, $\cos 30° = \dfrac{AH}{AM}$, $AM = \dfrac{3\sqrt{7} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{21}$.

$\triangle AMC$: $AM = 2\sqrt{21}$; $AC = 12\sqrt{7}$; $\angle CAM = 30°$

по теореме косинусов: $MC = \sqrt{(2\sqrt{21})^2 + (12\sqrt{7})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{21} \cdot 12\sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$

$MC = \sqrt{4 \cdot 21 + 12 \cdot 12 \cdot 7 - 24 \cdot 21} = \sqrt{21(4 + 48 - 24)} = \sqrt{21 \cdot 28} = 14\sqrt{3}$.

$\triangle OMC$: $\cos\angle OCM = \dfrac{OC^2 + MC^2 - OM^2}{2 \cdot OC \cdot MC} = \dfrac{36 \cdot 7 + 196 \cdot 3 - 4 \cdot 21}{2 \cdot 6\sqrt{7} \cdot 14\sqrt{3}} = \dfrac{9}{2\sqrt{21}}$

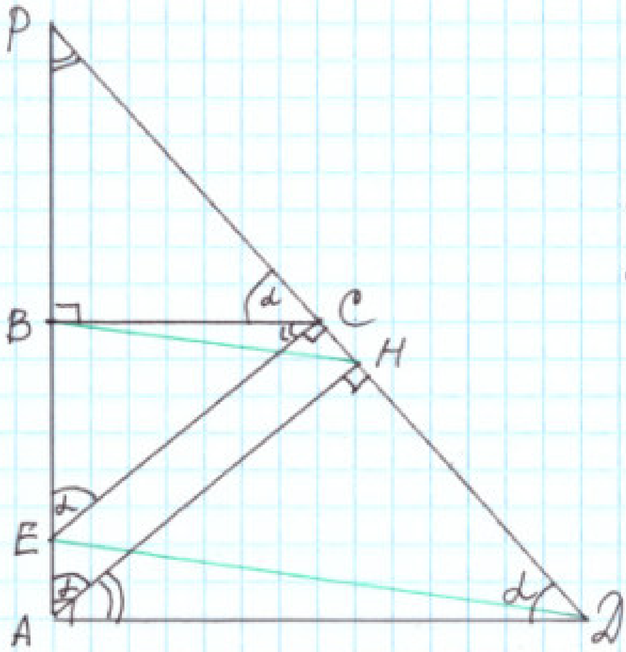
$\sin\angle OCM = \sqrt{1 - \left(\frac{9}{2\sqrt{21}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{81}{84}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{21}} = \dfrac{1}{2\sqrt{7}}$

$\triangle OCK$: $OK \perp MC$; $\sin\angle OCM = \dfrac{OK}{OC}$ => $OK = 6\sqrt{7} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{7}} = 3$.

Ответ: б) 3.

16.4. Четырехугольники (часть 2).

⑥ ЕГЭ – 2016.



Дано: $ABCD$ – трапеция, $BC \parallel AD$
$AB \perp AD$, $AH \perp CD$
$E \in AB$, $CD \perp CE$.

а) Док-ть: $BH \parallel ED$

б) Найти: $BH : ED$, если $\angle BCD = 135°$

а) Пусть $\angle ADC = \alpha$, тогда
$\angle BCD = 180° - \alpha \Rightarrow \angle BCE = 90° - \alpha$
а тогда $\angle BEC = \angle EAH = \alpha$
$AB \cap DC = P$, $\angle DPH = 90° - \alpha$.

$\triangle BCE \sim \triangle HAD$ (по двум углам) $\Rightarrow \dfrac{BE}{HD} = \dfrac{EC}{AD}$
$\triangle PCE \sim \triangle PAD$ (по двум углам) $\Rightarrow \dfrac{PE}{PD} = \dfrac{EC}{AD}$
$\Rightarrow$

$\dfrac{BE}{HD} = \dfrac{PE}{PD} \Rightarrow \dfrac{PE}{BE} = \dfrac{PD}{HD}$; $\dfrac{PB+BE}{BE} = \dfrac{PH+HD}{HD}$;

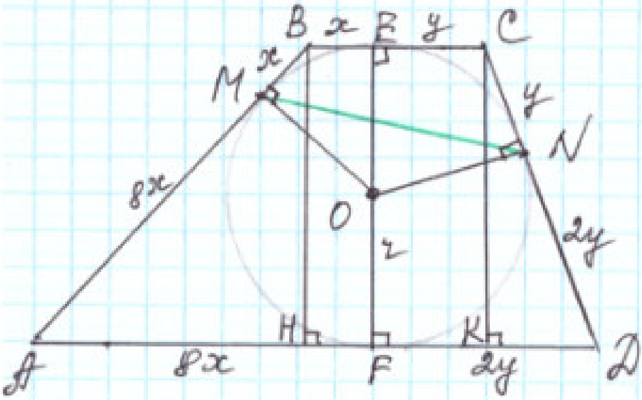
$\dfrac{PB}{BE} + 1 = \dfrac{PH}{HD} + 1$; $\dfrac{PB}{BE} = \dfrac{PH}{HD} \Rightarrow BH \parallel ED$, ч.т.д.
(по теореме о пропорциональных отрезках).

б) $\angle BCD = 135° \Rightarrow \angle BCE = 135° - 90° = 45°$, $\angle BEC = \alpha = 45°$.
$\triangle PBC$ – равнобедренный, $PB = BC$.
$\triangle BCE$ – равнобедренный, $BC = BE$
$\Rightarrow PB = BE$.
$\triangle PBH \sim \triangle PED$ (по двум углам) $\Rightarrow \dfrac{BH}{ED} = \dfrac{PB}{PE} = \dfrac{PB}{2PB} = \dfrac{1}{2}$.

Ответ: б) $\dfrac{1}{2}$

16.4. Четырехугольники (часть 2)

⑦ ЕГЭ-2017.



Дано: ABCD – трапеция, $BC \parallel AD$
Окр. вписана в ABCD
$M \in AB$, $N \in CD$
M и N – точки касания
$AM = 8MB$, $DN = 2CN$

а) Док-ть: $AD = 4 \cdot BC$

б) Найти: MN, если $r = \sqrt{6}$

r – радиус окружности

а) O – центр окружности, тогда $OM \perp AB$, $ON \perp CD$, $OE \perp BC$, $OF \perp AD$.

$AM = 8MB$. Пусть $MB = x$, тогда $AM = 8x$

$DN = 2 \cdot CN$. Пусть $CN = y$, тогда $DN = 2y$.

$BE = BM = x$, $AM = AF = 8x$; $CE = CN = y$; $DN = DF = 2y$

$BH \perp AD$; $CK \perp AD$, $AH = 8x - x = 7x$; $KD = 2y - y = y$

Из $\triangle ABH$: $BH^2 = (9x)^2 - (7x)^2 = 81x^2 - 49x^2 = 32x^2$

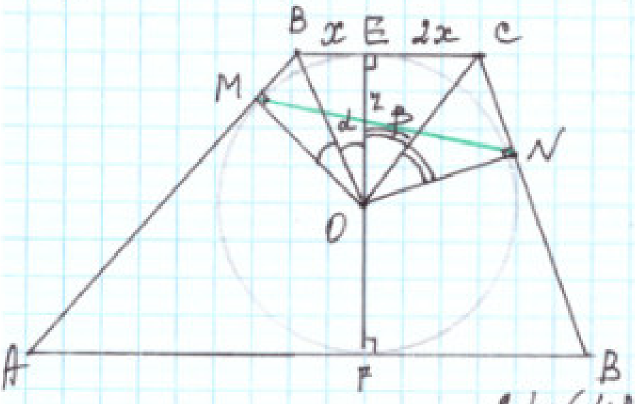
Из $\triangle CDK$: $CK^2 = (3y)^2 - y^2 = 9y^2 - y^2 = 8y^2$

т.к. $BH^2 = CK^2$, то $32x^2 = 8y^2$, $y^2 = 4x^2$, $\boxed{y = 2x}$

$AD = 8x + 2y = 8x + 4x = 12x$
$BC = x + y = x + 2x = 3x$

$AD = 12x = 4 \cdot 3x = 4 \cdot BC$, ч.т.д.

б) $r = \sqrt{6}$, $BH = 2r = 2\sqrt{6}$, $BH^2 = 32x^2$, $24 = 32x^2$, $x^2 = \frac{3}{4}$, $\boxed{x = \frac{\sqrt{3}}{2}}$



$\triangle OBE$: $tg\angle BOE = tg\alpha = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\triangle OCE$: $tg\angle COE = tg\beta = \frac{2x}{r} = \frac{2\sqrt{2}}{4}$

$tg\angle BOC = tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2\sqrt{2}}{4}}{1 - \frac{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{16}} = \frac{3\sqrt{2} \cdot 4}{4 \cdot 3} = \sqrt{2}.$$

$tg\angle MON = tg\,2(\alpha+\beta) = \frac{2\,tg(\alpha+\beta)}{1 - tg^2(\alpha+\beta)} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{1 - 2} = -2\sqrt{2}$, $\angle MON$ – тупой.

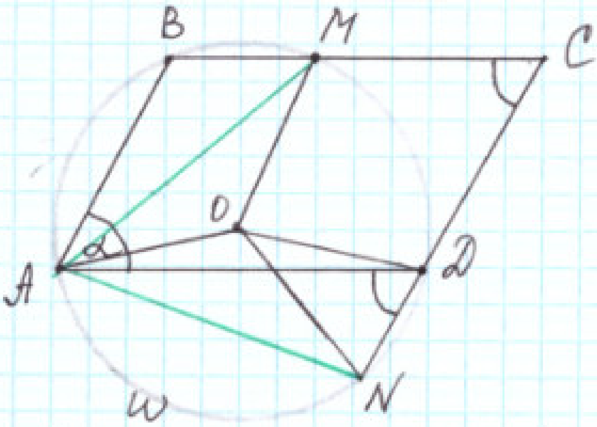
$\frac{1}{\cos^2(2(\alpha+\beta))} = 1 + tg^2 2(\alpha+\beta)$; $\cos^2 2(\alpha+\beta) = \frac{1}{9} \Rightarrow \cos 2(\alpha+\beta) = -\frac{1}{3}$

$\triangle MON$: $MN = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r \cdot r \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = \sqrt{6 + 6 + 4} = \sqrt{16} = 4$ (по теореме косинусов)

Ответ: б) 4

16.4. Четырехугольники (часть 2)

(8) ЕГЭ-2018



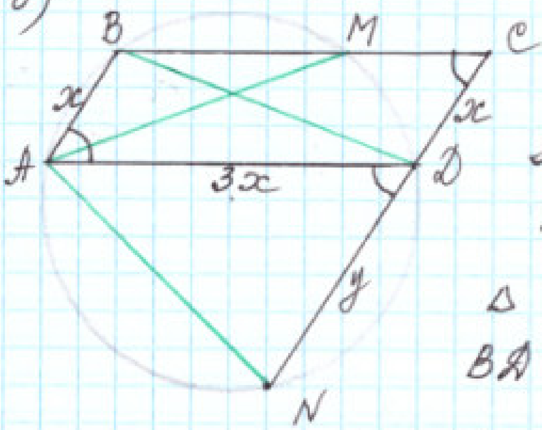
Дано: $ABCD$ – параллелограмм
ω – окружность
$A, B, D \in \omega$
$BC \cap \omega = M$, $CD \cap \omega = N$

а) Док-ть: $AM = AN$

б) Найти: $CD : DN$, если $AB : BC = 1 : 3$
$\cos\angle BAD = \frac{2}{5}$

а) O – центр окружности, $OA = OM = OD = ON = R$.
Пусть $\angle BAD = \alpha$, тогда $\angle ABM = 180° - \alpha$, $\smile ADM = 360° - 2\alpha$,
$\angle AOM = 2\alpha$, т.к. он центральный и опирается на дугу ABM, $\smile ABM = 2\alpha$.
$\angle ADN = \angle BAD = \alpha$, как накрест лежащие при $AB \parallel CD$.
$\angle ADN$ – вписанный, $\smile AN = 2\alpha$, $\angle AON = 2\alpha$, т.к. $\angle AON$ – центральный и опирается на $\smile AN$.
$\triangle AOM = \triangle AON$ по двум сторонам и углу между ними: $AO = OM = ON$; $\angle AOM = \angle AON = 2\alpha$, т.е. $AM = AN$

б)



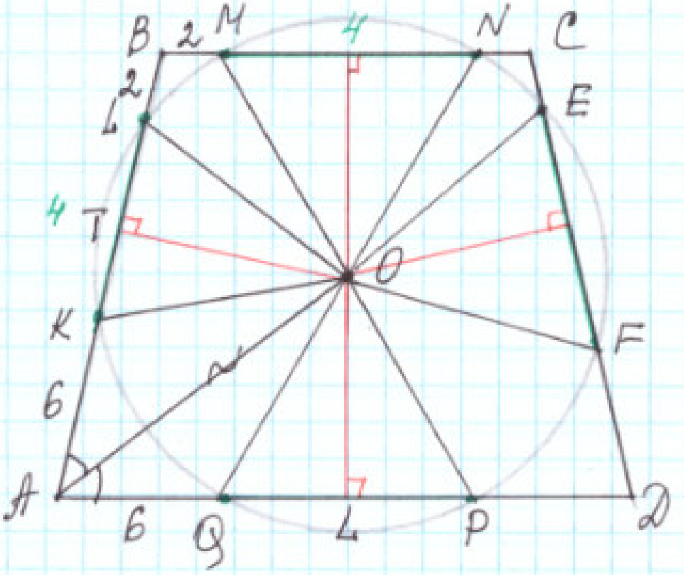
$\angle BAD = \alpha$, $\cos\alpha = \frac{2}{5}$, $AB : BC = 1 : 3$.
Пусть $AB = CD = x$, $BC = AD = 3x$, $DN = y$.
$ABDN$ – равнобедренная трапеция, $BD = AN$, $BD^2 = AN^2$.
$\triangle BCD$: $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos\alpha$
$BD^2 = 9x^2 + x^2 - 2 \cdot 3x \cdot x \cdot \frac{2}{5}$; $\boxed{BC^2 = \frac{38}{5}x^2}$

$\triangle ADN$: $AN^2 = AD^2 + DN^2 - 2 \cdot AD \cdot DN \cdot \cos\alpha$ (по теореме косинусов)
$AN^2 = 9x^2 + y^2 - 2 \cdot 3x \cdot y \cdot \frac{2}{5}$; $\boxed{AN^2 = 9x^2 + y^2 - \frac{12}{5}xy}$
$\frac{38}{5}x^2 = 9x^2 + y^2 - \frac{12}{5}xy$. Умножим на 5, разделим на y^2.
$7\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 12\left(\frac{x}{y}\right) + 5 = 0$
$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{y} = 1 \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{7} \end{array}\right.$ Отношение $\frac{CD}{DN}$ равно $\frac{1}{1}$ или $\frac{5}{7}$.

Ответ: б) $\frac{1}{1}$ или $\frac{5}{7}$

16.4. Четырехугольники (часть 2)

(9) ЕГЭ-2018



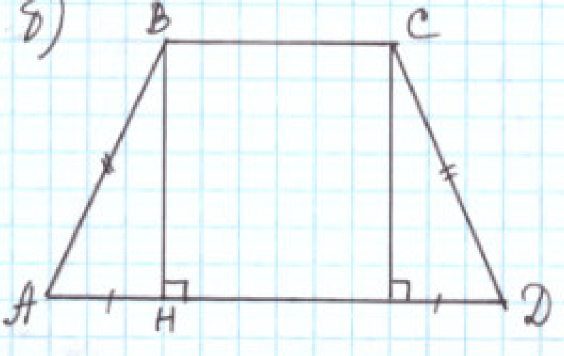
Дано: $ABCD$ – трапеция
$BC \parallel AD$
Окружность пересекает все стороны $ABCD$
$MN = EF = KL = PQ$.
$KL \subset AB$

а) Док-ть: биссектрисы углов $ABCD$ пересекаются в центре окружности

б) Найти: BH, если $BH \perp AD$, $AK = 6$, $AL = 10$; $BL = 2$.

а). O – центр окружности
$\triangle OMN = \triangle OEF = \triangle OKL = \triangle OPQ$ по трем сторонам.
В равных треугольниках равны высоты
$OL \perp AD$, $OT \perp AB$, $OL = OT$, AO – общая, значит
$\triangle OAL = \triangle OAT$ по гипотенузе и катету,
$\angle OAT = \angle OAL$, т.е. AO – биссектриса $\angle BAD$.
Аналогично доказывается, что DO, CO и BO тоже биссектрисы, и они все пересекаются в центре окружности.

б)



$ABCD$ – равнобедренная трапеция, $AK = 6$, $KL = 4$, $BL = 2$
$AB = CD = 12$.
$BC = BM + MN + NC = 2 + 4 + 2 = 8$
$AD = AQ + QP + PD = 6 + 4 + 6 = 16$.

$AH = \frac{16-8}{2} = 4$. $\triangle ABH$: $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2}$ по т. Пифагора
$BH = \sqrt{12^2 - 4^2} = \sqrt{8 \cdot 16} = \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 16} = 2 \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

Ответ: б) $8\sqrt{2}$

Задание №16.4. Ответы.

1) $1:2$.

2) $14+8\sqrt{3}$.

3) 96.

4) $18\sqrt{3}$.

5) 3.

6) $1:2$.

7) 4.

8) $5:7$. или $1:1$.

9) $8\sqrt{2}$.

Задание №16.5. Четырехугольники (часть 3). Окружности.

1) (ЕГЭ-2015)

В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD, вторая — боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P. Докажите, что $\dfrac{AP}{PD} = \sin D$.

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны 3 и 1.

2) (ЕГЭ-2016)

В трапеции $ABCD$ точка E — середина основания AD, точка M — середина боковой стороны AB. Отрезки CE и DM пересекаются в точке O.

а) Докажите, что площади четырехугольника $AMOE$ и треугольника COD равны.

б) Найдите, какую часть от площади трапеции составляет площадь четырехугольника $AMOE$, если $BC = 3,\ AD = 4$.

3) (ЕГЭ-2019)

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Точки M и N являются серединами сторон AB и CD, соответственно. Окружность, проходящая через точки B и C, пересекает отрезки BM и CN в точках P и Q (отличных от концов отрезков), соответственно.

а) Докажите, что точки $M,\ N,\ P$ и Q лежат на одной окружности.

б) Найдите QN, если отрезки DP и PC перпендикулярны, $AB = 21,\ BC = 4,\ CD = 20, AD = 17$.

4) (ЕГЭ-2014)

К двум непересекающимся окружностям равных радиусов проведены две параллельные общие касательные. Окружности касаются одной из этих прямых в точках A и B. Через точку C, лежащую на отрезке AB, проведены касательные к этим окружностям, пересекающие вторую прямую в точках D и E, причем отрезки CA и CD касаются одной окружности, а отрезки CB и CE — другой.

а) Докажите, что периметр треугольника CDE вдвое больше расстояния между центрами окружностей.

б) Найдите DE, если радиусы окружностей равны 5, расстояние между их центрами равно 18, а $AC = 8$.

5) (ЕГЭ-2015)

Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причем меньшая окружность проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке P. Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках K и M соответственно.

а) Докажите, что прямые KM и BC параллельны.

б) Пусть L — точка пересечения отрезков KM и AP. Найдите AL, если радиус большей окружности равен 10, а $BC = 16$.

6) (ЕГЭ-2017)

Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B, причем точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB. Продолжение диаметра CA первой окружности и хорды CB этой же окружности пересекает вторую окружность в точках D и E соответственно.

а) Докажите, что треугольники CBD и O_1AO_2 подобны.

б) Найдите AD, если углы DAE и BAC равны, радиус второй окружности в четыре раза больше радиуса первой окружности и $AB = 2$.

7) (ЕГЭ-2017)

Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причем меньшая окружность проходит через центр O большей. Диаметр BC большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке M, отличной от точки A. Лучи AO и AM вторично пересекают большую окружность в точках P и Q соответственно. Точка C лежит на дуге AQ большей окружности, не содержащей точку P.

а) Докажите, что прямые PQ и BC параллельны.

б) Известно, что $\sin\angle AOC = \sqrt{15}/4$. Прямые PC и AQ пересекаются в точке K. Найдите отношение $QK : KA$.

8) (ЕГЭ-2019)

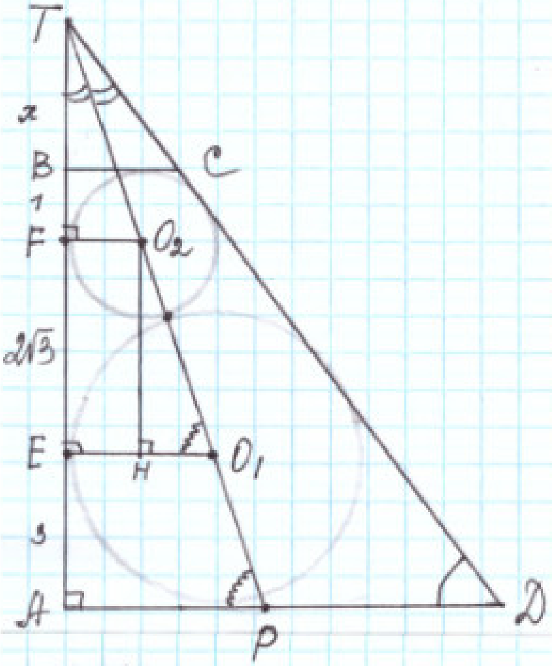
Две окружности разных радиусов касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй окружности в точке B. Луч BK пересекает первую окружность в точке D, луч AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — трапеция.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCD, если радиус первой окружности равен 1, а радиус второй окружности равен 4.

16.5. Четырехугольники (часть 3). Окружности.

① ЕГЭ – 2015



Дано: $ABCD$ – трапеция, $BC \parallel AD$

$\angle BAD = 90°$

$\omega_1 = окр(O_1; R)$ касается AB, AD, CD

$\omega_2 = окр(O_2, r)$ касается AB, CB, CD, ω_1

а) Док-ть: $\frac{AP}{PD} = \sin\angle D$, если $P = O_1O_2 \cap AD$

б) Найти: S_{ABCD}, если $R = 3$, $r = 1$.

а) Пусть $AB \cap CD = T$. Окружности ω_1 и ω_2 касаются сторон $\angle ATD$, значит их центры O_1 и O_2 лежат на биссектрисе этого угла. По свойству биссектрисы угла треугольника.

$\frac{AP}{PD} = \frac{AT}{TD}$, но $\frac{AT}{TD} = \sin\angle D \Longrightarrow \frac{AP}{PD} = \sin\angle D$, ч.т.д.

б) $O_1E \perp AB$; $O_2F \perp AB$; $O_2H \perp O_1E$. Пусть $TB = x$

$O_2O_1 = R + r = 3 + 1 = 4$; $O_1H = R - r = 3 - 1 = 2$.

$O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$; $EF = O_2H = 2\sqrt{3}$.

$\sin\angle O_2O_1H = \frac{O_2H}{O_1O_2} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle O_2O_1H = 60° = \angle TPA$.

В $\triangle TPA$ $\angle ATP = 90° - 60° = 30°$, а значит $\angle ATD = 60°$

$\angle ADT = 30°$. $AB = 3 + 1 + 2\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3}$ $\boxed{AB = 4 + 2\sqrt{3}}$

$\triangle TFO_2$: $tg\, 30° = \frac{FO_2}{TF}$; $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{x+1}$; $\boxed{x = \sqrt{3} - 1}$

$\triangle TBC$: $tg\, 60° = \frac{BC}{TB}$; $BC = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) = 3 - \sqrt{3}$ $\boxed{BC = 3 - \sqrt{3}}$

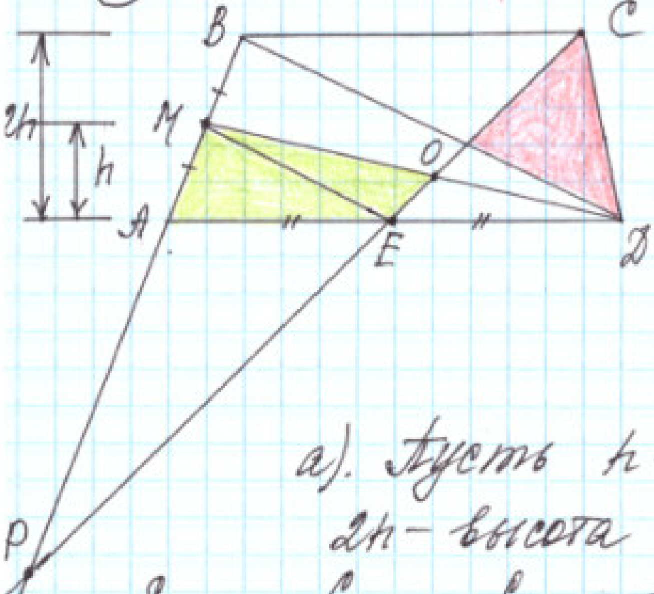
$\triangle TAD$: $tg\, 60° = \frac{AD}{AT}$; $AD = \sqrt{3}(3\sqrt{3} + 3) = 9 + 3\sqrt{3}$ $\boxed{AD = 9 + 3\sqrt{3}}$

$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot AB = \frac{3 - \sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3}}{2} \cdot (4 + 2\sqrt{3}) = (6 + \sqrt{3})(4 + 2\sqrt{3}) =$

$= 24 + 4\sqrt{3} + 12\sqrt{3} + 6 = 30 + 16\sqrt{3}$ **Ответ:** б) $30 + 16\sqrt{3}$

16.5. Четырехугольники (часть 3). Окружности.

② ЕГЭ-2016.



Дано: $ABCD$ – трапеция, $BC \parallel AD$
E – середина AD
M – середина AB
$CE \cap DM = O$

а) Док-ть: $S_{AMOE} = S_{COD}$

б) Найти: $S_{AMOE} : S_{ABCD}$, если $BC = 3$, $AD = 4$.

а). Пусть h – высота ΔAMD, тогда $2h$ – высота трапеции $ABCD$.

$S_{AMOE} = S_{AMD} - S_{OED} = \frac{1}{2} AD \cdot h - S_{OED} = \frac{1}{2} 2 \cdot DE \cdot h - S_{OED} = DE \cdot h - S_{OED}$

$S_{COD} = S_{CED} - S_{OED} = \frac{1}{2} ED \cdot 2h - S_{OED} = DE \cdot h - S_{OED}$

получим, что $S_{AMOE} = S_{COD}$, ч.т.д.

б) $BC = 3$, $AD = 4$, $AE = ED = 2$. Пусть $S_{ABCD} = S$.

$S_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot 2h = 4h$; $S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot 2h = 3h$; $S = 7h$

$S_{ABD} = \frac{4}{7} S$; $S_{AMD} = S_{BMD} = \frac{1}{2} S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} S = \frac{2}{7} S$

$S_{AME} = \frac{1}{2} S_{AMD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} S = \frac{1}{7} S$; $S_{MED} = S_{AME} = \frac{1}{7} S$.

$\Delta PBC \sim \Delta PAE$ по двум углам ($P = AB \cap CE$).

$\frac{PB}{PA} = \frac{BC}{AE} = \frac{3}{2}$; $PB = 3x$, $PA = 2x$, $AB = x$, $AM = 0{,}5x$.

Для ΔAMD и прямой PC по теореме Менелая:

$\frac{DO}{OM} \cdot \frac{MP}{PA} \cdot \frac{AE}{ED} = 1$; $\frac{DO}{OM} \cdot \frac{2{,}5x}{2x} \cdot \frac{1}{1} = 1$; $\frac{DO}{OM} = \frac{4}{5}$

$S_{OED} : S_{MOE} = 4 : 5$; $S_{MOE} = \frac{5}{9} S_{MED} = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{7} S = \frac{5}{63} S$

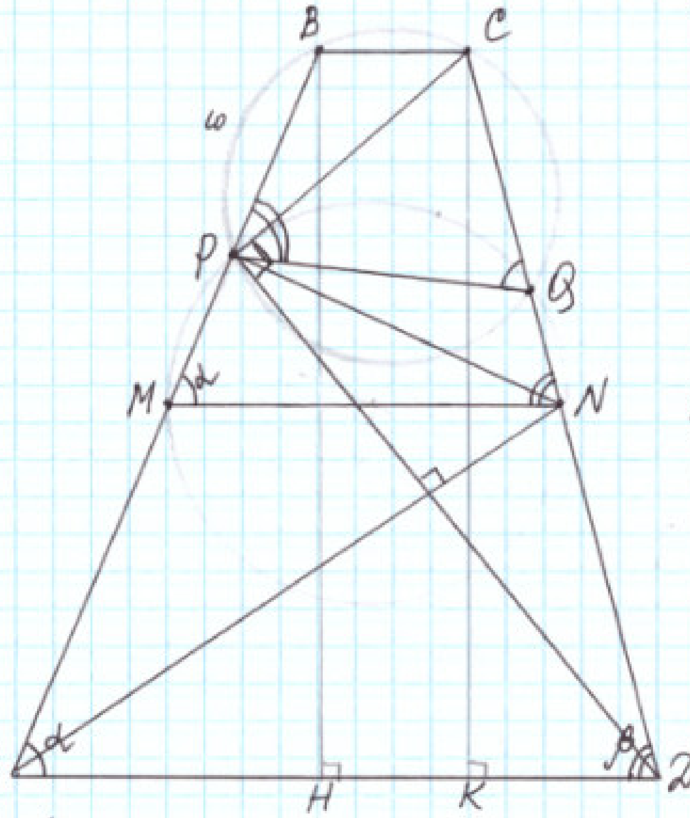
$S_{AMOE} = S_{AME} + S_{MOE} = \frac{1}{7} S + \frac{5}{63} S = \frac{14}{63} S = \frac{2}{9} S$.

$S_{AMOE} = \frac{2}{9} S_{ABCD}$.

Ответ: б) $\frac{2}{9}$

16.5. Четырехугольники (часть 3). Окружность

3 ЕГЭ-2019



Дано: $ABCD$ - трапеция, $BC \parallel AD$
M - середина AB
N - середина CD
ω - окружность, $BC \subset \omega$
$\omega \cap MB = P$, $\omega \cap CN = Q$

а) Док-ть: M, N, P, Q лежат на одной окружности

б) Найти: QN, если $DP \perp PC$
$AB = 21$, $CD = 20$
$BC = 4$, $AD = 17$.

а) Пусть $\angle BAD = \alpha$, $\angle CDA = \beta$, MN - средняя линия, $MN \parallel AD$, $\angle BMN = \alpha$, $\angle CNM = \beta$; $\angle ABC = 180^\circ - \alpha$; $\angle BCD = 180^\circ - \beta$.
$PBCQ$ - вписан в окружность ω, значит
$\angle PBC + \angle PQC = 180^\circ \Rightarrow \angle CQP = \alpha$, $\angle BPQ = \beta$, а им смежные углы $\angle QPM = 180^\circ - \beta$; $\angle PQN = 180^\circ - \alpha$.
Тогда в четырехугольнике $MPQN$ суммы противоположных углов равны 180°
($\angle M + \angle Q = \alpha + 180^\circ - \alpha = 180^\circ$; $\angle P + \angle N = 180^\circ - \beta + \beta = 180^\circ$),
а это значит, что точки M, N, P, Q лежат на одной окружности, ч.т.д.

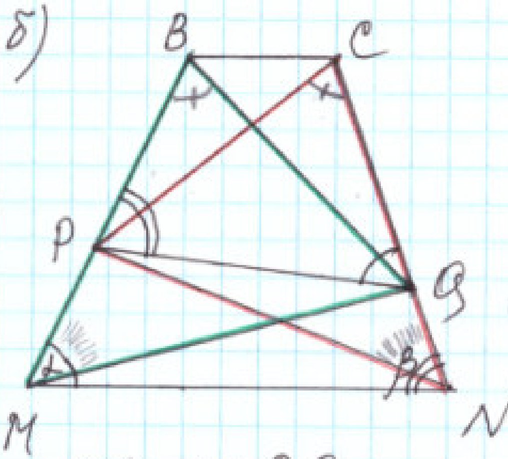
б) $BH \perp AD$; $CK \perp AD$. Пусть $AH = x$, $BC = HK = 4$, $KD = 13 - x$.
$AB = 21$; $CD = 20$, $BH = CK \Rightarrow BH^2 = CK^2$.

$$\left.\begin{array}{l} \triangle ABH:\ BH^2 = AB^2 - AH^2 = 21^2 - x^2 \\ \triangle CKD:\ CK^2 = CD^2 - KD^2 = 20^2 - (13-x)^2 = 20^2 - 169 + 26x - x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$21^2 - x^2 = 20^2 - 169 + 26x - x^2$; $26x = 21^2 - 20^2 + 169$; $26x = 210$

$x = \frac{105}{13}$, $AH = \frac{105}{13}$, $KD = 13 - \frac{105}{13} = \frac{169-105}{13} = \frac{64}{13}$.

б)



$MN = \frac{BC + AD}{2} = \frac{4+17}{2} = 10{,}5$

$BM = \frac{1}{2} AB = \frac{21}{2} = 10{,}5$

$CN = \frac{1}{2} CD = 10$, $PN = CN = DN = 10$

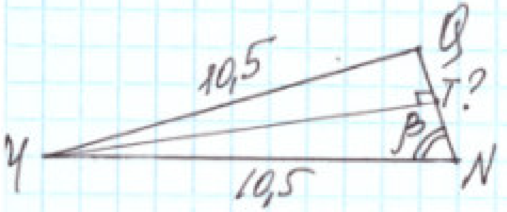
$BCQP$ – вписан в окружность, значит $\angle PBQ = \angle PCQ$, как вписанные углы, опирающиеся на $\cup PQ$.

$MPQN$ тоже вписан в окружность, значит $\angle PMQ = \angle PNQ$, как вписанные, опирающиеся на $\cup PQ$.

$\triangle MBQ \sim \triangle NCP$ по двум углам.

$\frac{MB}{NC} = \frac{MQ}{NP}$; $\frac{MB}{10} = \frac{MQ}{10} \Rightarrow MB = MQ = 10{,}5$.

$\triangle MQN$: $MQ = MN = 10{,}5$.



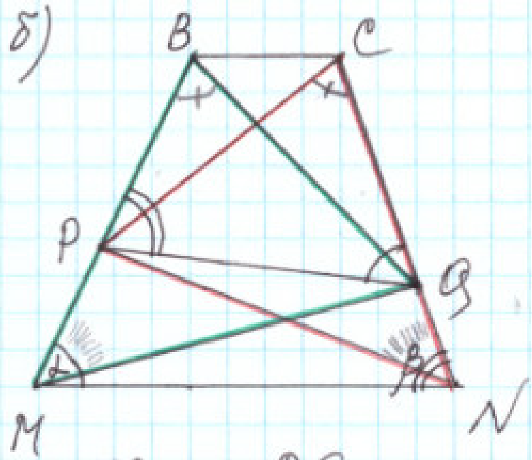
$\cos\beta = \frac{KD}{CD} = \frac{64}{13 \cdot 20} = \frac{16}{65}$

$MT \perp QN$; $\cos\beta = \frac{NT}{MN} \Rightarrow NT = MN \cdot \cos\beta$

$NT = \frac{10{,}5 \cdot 16}{65} = \frac{21 \cdot 8}{65} = \frac{168}{65}$

$QN = 2 \cdot NT = \frac{2 \cdot 168}{65} = \frac{336}{65}$

Ответ: б) $\frac{336}{65}$

б) 

$MN = \frac{BC+AD}{2} = \frac{4+17}{2} = 10,5$

$BM = \frac{1}{2}AB = \frac{21}{2} = 10,5$

$CN = \frac{1}{2}CD = 10$, $PN = CN = DN = 10$

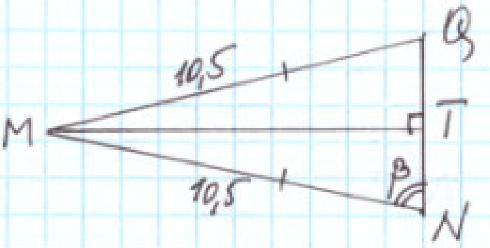
$BCQP$ – вписан в окружность, значит $\angle PBQ = \angle PCQ$, как вписанные углы, опирающиеся на $\smile PQ$.

$MPQN$ тоже вписан в окружность, значит $\angle PMQ = \angle PNQ$, как вписанные, опирающиеся на $\smile PQ$.

$\triangle MBQ \sim \triangle NCP$ по двум углам.

$\frac{MB}{NC} = \frac{MQ}{NP}$; $\frac{MB}{10} = \frac{MQ}{10} \Rightarrow MB = MQ = 10,5$.

$\triangle MQN$: $MQ = MN = 10,5$.



$\cos\beta = \frac{KD}{CD} = \frac{64}{13 \cdot 20} = \frac{16}{65}$

$MT \perp QN$; $\cos\beta = \frac{NT}{MN} \Rightarrow NT = MN \cdot \cos\beta$

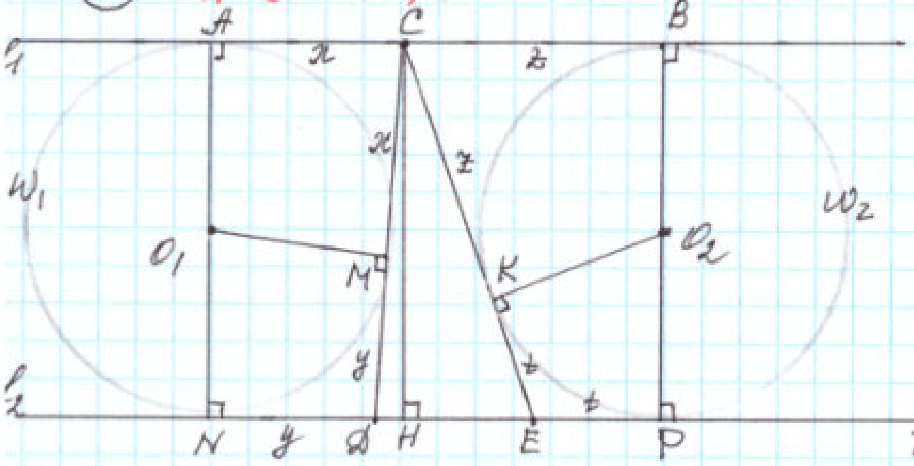
$NT = \frac{10,5 \cdot 16}{65} = \frac{21 \cdot 8}{65} = \frac{168}{65}$

$QN = 2 \cdot NT = \frac{2 \cdot 168}{65} = \frac{336}{65}$

Ответ: б) $\frac{336}{65}$

16.5. Четырехугольники (часть 3). Окружности.

4 ЕГЭ-2014



Дано: $\omega_1 = окр(O_1; R)$
$\omega_2 = окр(O_2; R)$
l_1, l_2 касательные
$l_1 \parallel l_2$, $A \in \omega_1$, $B \in \omega_2$
$C \in AB$, A и B – т. кас.
CD – касат. к ω_1
CE – касат. к ω_2.

а) Док-ть: $P_{CDE} = 2 \cdot O_1O_2$.
б) Найти: DE, если $R = 5$, $O_1O_2 = 18$, $AC = 8$.

а). $O_1A \perp l_1$, $O_1N \perp l_2$, $O_1M \perp CD$
$O_2B \perp l_1$, $O_2P \perp l_2$, $O_2K \perp CE$.
Пусть $AC = CM = x$, $DN = DM = y$; $CB = CK = z$; $EK = EP = t$
$CH \perp l_2$, $CH = 2R$, $O_1O_2 = AB = x + z$; $O_1O_2 = NP = y + t + DE$.
$x + z = y + t + DE \Rightarrow DE = x + z - y - t$.
$P_{CDE} = CD + CE + DE = x + y + z + t + DE = x + y + z + t + x + z - y - t = 2(x+z) = 2 \cdot O_1O_2$
$P_{CDE} = 2 \cdot O_1O_2$, ч.т.д.

б) $R = 5$, $AC = x = 8$, $O_1O_2 = 18 \Rightarrow x + z = 18 \Rightarrow z = 10$
$\triangle CDH$: $CD^2 = DH^2 + CH^2$; $CD = 8 + y$; $DH = 8 - y$; $CH = 2R = 10$.
$(8+y)^2 = (8-y)^2 + 10^2$; $64 + 16y + y^2 = 64 - 16y + y^2 + 100$; $32y = 100$
$y = \frac{25}{8} \Rightarrow DH = 8 - \frac{25}{8} = \frac{64-25}{8} = \frac{39}{8}$ $\boxed{DH = \frac{39}{8}}$

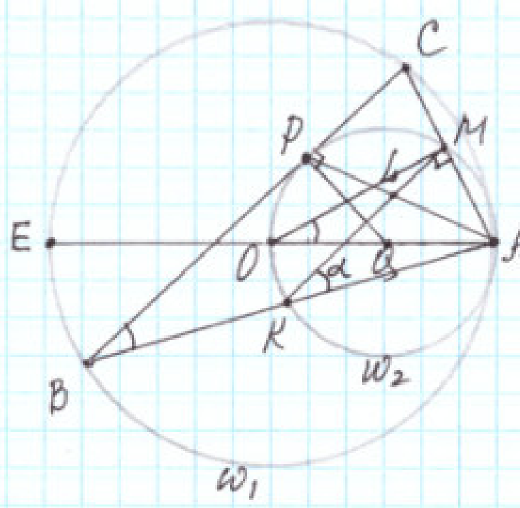
$\triangle CEH$: $CE^2 = HE^2 + CH^2$; $CE = 10 + t$, $HE = 10 - t$, $CH = 10$.
$(10+t)^2 = (10-t)^2 + 10^2$; $100 + 20t + t^2 = 100 - 20t + t^2 + 100$; $40t = 100$
$t = \frac{5}{2} \Rightarrow HE = 10 - \frac{5}{2} = \frac{15}{2} = \frac{60}{8}$ $\boxed{HE = \frac{60}{8}}$

$DE = DH + HE = \frac{39}{8} + \frac{60}{8} = \frac{99}{8}$ $\boxed{DE = \frac{99}{8}}$

Ответ: б) $\frac{99}{8}$

16.5. Четырехугольники (часть 3). Окружности.

5 ЕГЭ-2015



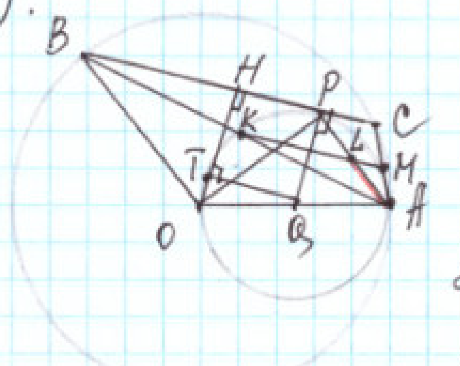
Дано: $\omega_1 = окр(O; R)$
$\omega_2 = окр(Q; r)$
$\omega_1 \cap \omega_2 = A$, $O \in \omega_2$
BC – хорда ω_1
BC касается ω_2 в точке P
$AB \cap \omega_2 = K$
$AC \cap \omega_2 = M$

а) Док-ть: $KM \parallel BC$

б) Найти: AL, если $L = KM \cap AP$, $R = 10$, $BC = 16$.

а) Пусть $\angle AKM = \alpha$, тогда $\angle AOM = \alpha$, как вписанные углы ω_2, опирающиеся на дугу AM.
AO – диаметр ω_2, значит $\angle AMO = 90°$, тогда $\angle OAM = 90° - \alpha$. Продолжим AO до пересечения с ω_1. $\angle CAE = 90° - \alpha$, вписанный в ω_1, $\smile EC = 2(90° - \alpha)$, $\smile AC = 2\alpha$, $\angle ABC = \alpha$, получаем: $\angle AKM = \angle ABC = \alpha$, значит $KM \parallel BC$, ч.т.д.

б).

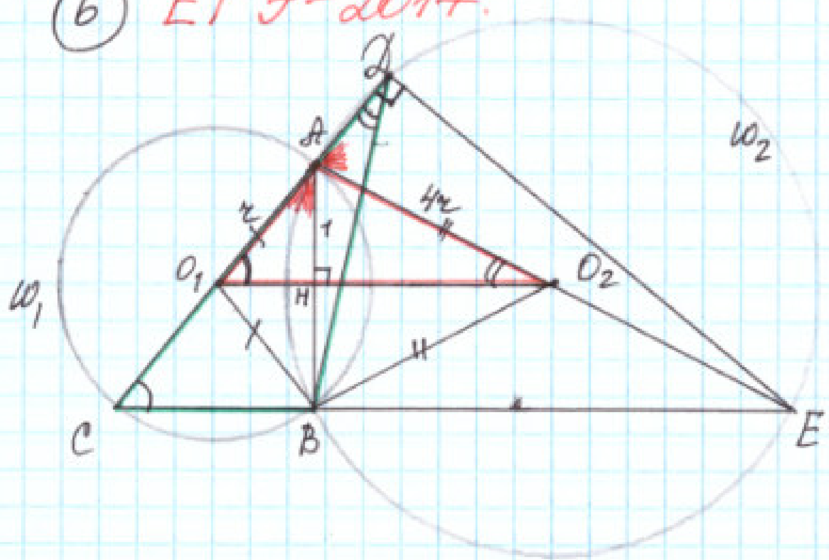


$BC = 16$, $R = OA = 10$, $AQ = QP = 5$.
$KM \parallel BC$.
$\triangle ABC$ вписан в окружность:
$\frac{BC}{\sin BAC} = 2R$; $\sin \angle BAC = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$
$\frac{KM}{\sin \angle KAM} = 2AQ \Rightarrow KM = \frac{4}{5} \cdot 10 = 8$.
$\triangle AKM \sim \triangle ABC$ (по двум углам) с $k = \frac{KM}{BC} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$
значит $AL = \frac{1}{2} AP$. $OH \perp BC$; $OB = 10$, $BH = 8 \Rightarrow OH = 6$.
$QP \perp BC \Rightarrow QP \parallel OH$. $QT \perp OH$, $OT = 6 - 5 = 1$
$\triangle OTQ$: $QT = \sqrt{5^2 - 1^2} = \sqrt{24}$, $QT = PH = \sqrt{24}$.
$\triangle OHP$: $OP = \sqrt{6^2 + \sqrt{24}^2} = \sqrt{36+24} = \sqrt{60}$; $\angle APO = 90°$ (вписанный)
$\triangle OPA$: $AP = \sqrt{100 - 60} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \Rightarrow AL = \sqrt{10}$.

Ответ: б) $\sqrt{10}$

16.5. Четырехугольники (часть 3). Окружности.

⑥ ЕГЭ-2017.



Дано: $\omega_1 = \text{окр.}(O_1; r)$
$\omega_2 = \text{окр.}(O_2; R)$
$\omega_1 \cap \omega_2 = A; B$
CA – диаметр ω_1
CB – хорда ω_1
$CA \cap \omega_2 = D$
$CB \cap \omega_2 = E$

а) Док-ть: $\triangle CBD$ и $\triangle O_1AO_2$ подобны

б) Найти: AD, если $R = 4r$, $\angle DAE = \angle BAC$, $AB = 2$.

а) $\triangle AO_1O_2 = \triangle BO_1O_2$ по трем сторонам:

$O_1A = O_1B = r$; $O_2A = O_2B = R$, O_1O_2 – общая. $AB \cap O_1O_2 = H$.

Значит $\angle AHO_2 = \angle BHO_2 = 90°$.

$\angle AO_1B = 2\angle AO_1O_2$, $\angle AO_1B$ – центральный, опирается на $\smile AB$, $\angle ACB$ – вписанный, опирается на $\smile AB$.

$\angle AO_1O_2 = \angle ACB$, т.е. $O_1O_2 \parallel CE$.

Аналогично: $\angle ADB = \angle AO_2O_1$.

Получим в $\triangle CBD$ и $\triangle O_1AO_2$ есть два равных угла, значит они подобны: $\triangle CBD \sim \triangle O_1AO_2$, ч.т.д.

б) $R = 4r$, $AB = 2$, $\angle DAE = \angle BAC$.

$\angle ABE = 90°$, т.к. $O_1O_2 \parallel CE \Rightarrow AE$ – диаметр, $\angle ADE = 90°$.

$AH = HB = 1$; $O_1A = r$, $\triangle O_1AH$: $\cos\angle HAO_1 = \frac{1}{r} = \cos\angle BAC$.

$\triangle ADE$: $\cos\angle DAE = \frac{AD}{AE} = \frac{AD}{8r}$

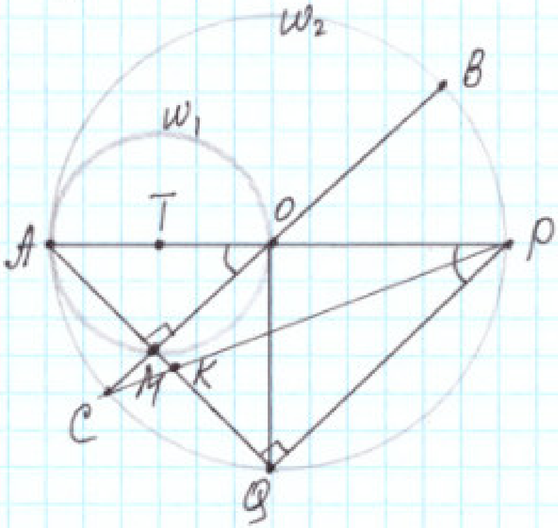
Но $\angle DEE = \angle BAC$ по условию, значит

$\frac{AD}{8r} = \frac{1}{r} \Rightarrow \boxed{AD = 8}$

Ответ: б) 8

16.5. Четырехугольники (часть 3). Окружности.

7 ЕГЭ - 2017



Дано: T - центр окружности ω_1, O - центр окружности ω_2

ω_1 и ω_2 касаются внутр. обр.

$A \in \omega_1$, $A \in \omega_2$.

$O \in \omega_1$

BC - диаметр ω_2

$BC \cap \omega_1 = M$

$AM \cap \omega_2 = Q$, $AO \cap \omega_2 = P$

а) Док-ть: $PQ \parallel BC$

б) Найти: $QK : KA$, если $\sin\angle AOC = \frac{\sqrt{15}}{4}$; $PC \cap AQ = K$

а) AO - диаметр ω_1, $M \in \omega_1$, $\angle AMO = 90°$, как вписанный угол, опирающийся на диаметр, $BC \perp AM$

AP - диаметр ω_2, $Q \in \omega_2$, $\angle AQP = 90°$, как вписанный угол, опирающийся на диаметр., $PQ \perp AQ$, $PQ \parallel AM$.

Получим, что $BC \perp AM$ и $PQ \perp AM$, значит $BC \parallel PQ$, ч.т.д.

б) $PC \cap AQ = K$, $\sin\angle AOC = \frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \sin\angle APQ = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\triangle AOQ$: $AO = OQ = R$, OM - высота $\Rightarrow$ OM - медиана,

M - середина AQ, C - середина дуги AQ,

$\angle APC = \angle QPC$ - как вписанные, опирающиеся на равные дуги, PK - биссектриса $\triangle APQ$.

По свойству биссектрисы: $\frac{QK}{KA} = \frac{PQ}{AP}$

$AP = 2R$; $\sin\angle APQ = \frac{AQ}{AP}$; $AQ = 2R \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}R}{2}$

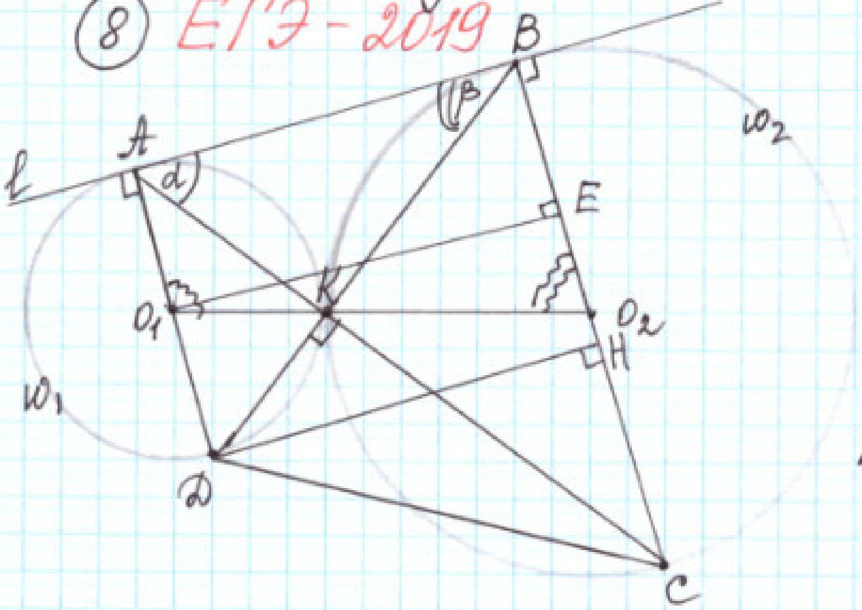
$PQ = \sqrt{AP^2 - AQ^2} = \sqrt{4R^2 - \frac{15}{4}R^2} = R\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{R}{2}$

$\frac{QK}{KA} = \frac{R}{2} : 2R = \frac{1}{4}$

Ответ: б) $\frac{1}{4}$

16.5. Четырехугольники (часть 3). Окружности.

(8) ЕГЭ - 2019



Дано: $\omega_1 = окр(O_1; r)$
$\omega_2 = окр(O_2; R)$, $R \neq r$
l - касается ω_1 в т. A
l - касается ω_2 в т. B
$BK \cap \omega_1 = D$
$AK \cap \omega_2 = C$

а) Док-ть: ABCD-трапеция
б) Найти: R_{BCD}, если $r=1$, $R=4$.

а). AB- касательная к ω_1, AK - хорда, $\angle BAK = \alpha$, тогда $\angle AO_1K = 2\alpha$. Аналогично: $\angle ABK = \beta$, $\angle BO_2K = 2\beta$.
$O_1A \perp AB$; $O_2B \perp AB$. В четырехугольнике ABO_2O_1 сумма углов равна $360°$: $90° + 90° + 2\alpha + 2\beta = 360°$.
$2\alpha + 2\beta = 180°$, $\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \angle AKB = 90°$.
$\angle AKD = 90°$, $\angle BKC = 90° \Rightarrow AD$ и BC - диаметры,
т.е. $DA \perp AB$; $CB \perp AB \Rightarrow AD \parallel BC$
Но $AB \nparallel CD$, значит ABCD- трапеция, ч.т.д.

б) $r=1$, $R=4$, $AD=2$, $BC=8$, $O_1O_2 = r+R = 5$.
$DH \perp BC$, $DH = AB$, $BH = AD = 2$, $HC = 8-2 = 6$.
$O_1E \perp BC$, $BE = 1$, $EO_2 = 4-1 = 3$, $O_1O_2 = 5$.
ΔO_1O_2E: $O_1E = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2E^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, $DH = 4$.
$S_{BCD} = \frac{BC \cdot DH}{2} = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16$. $\boxed{S_{BCD} = 16}$

ΔDHC: $DC = \sqrt{DH^2 + HC^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.
ΔABD: $BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

$$R_{BCD} = \frac{BC \cdot CD \cdot BD}{4 \cdot S_{BCD}} = \frac{8 \cdot 2\sqrt{13} \cdot 2\sqrt{5}}{4 \cdot 16} = \frac{\sqrt{65}}{2}$$ $\boxed{R_{BCD} = \frac{\sqrt{65}}{2}}$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{65}}{2}$

Задание №16.5. Ответы.

1) $30 + 16\sqrt{3}$.

2) $\dfrac{2}{9}$.

3) $\dfrac{336}{65}$.

4) $\dfrac{99}{8}$.

5) $\sqrt{10}$.

6) 8.

7) $1 : 4$.

8) $\dfrac{\sqrt{65}}{2}$.