





## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                      |    |
|------------------------------------------------------|----|
| §1. Задание 17.1. Дифференцированные платежи.....    | 2  |
| Решения.....                                         | 4  |
| Задание 17.1. Ответы.....                            | 12 |
| Задание 17.1(ДЗ). Дифференцированные платежи. ....   | 13 |
| Задание 17.1 (ДЗ). Ответы.....                       | 15 |
| §2. Задание 17.2. Аннуитетные платежи.....           | 16 |
| Решения.....                                         | 17 |
| Задание17.2. Ответы.....                             | 25 |
| Задание 17.2(ДЗ). Аннуитетные платежи. ....          | 26 |
| Задание 17.2(ДЗ). Ответы.....                        | 27 |
| §3. Задание 17.3. Экономические задачи. Разное.....  | 28 |
| Решения.....                                         | 29 |
| Задание17.3. Ответы.....                             | 37 |
| Задание 17.3(ДЗ). Экономические задачи. Разное. .... | 38 |
| Задание 17.3(ДЗ). Ответы.....                        | 39 |

## Задание 17.1. Дифференцированные платежи.

### 1) (ЕГЭ-2015)

15-го января планируется взять кредит в банке на 14 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 15% больше суммы, взятой в кредит. Найдите  $r$ .

### 2) (ЕГЭ-2015)

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 20 млн рублей на некоторый срок (целое число лет).

Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения составит 38 млн рублей?

### 3) (ЕГЭ-2015)

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на срок 15 лет.

Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите  $r$ , если известно, что наибольший годовой платеж по кредиту составит не более 1,9 млн рублей, а наименьший - не менее 0,5 млн рублей.

### 4) (ЕГЭ-2016)

15-го января планируется взять кредит в банке на сумму 1 млн рублей на 6 месяцев.

Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на  $r$  процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где  $r$  — **целое** число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей:

| Дата                   | 15.01 | 15.02 | 15.03 | 15.04 | 15.05 | 15.06 | 15.07 |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Долг<br>(в млн рублей) | 1     | 0,9   | 0,8   | 0,7   | 0,6   | 0,5   | 0     |

Найдите наименьшее значение  $r$ , при котором общая сумма выплат будет более 1,25 млн рублей.

**5) (ЕГЭ-2016)**

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на 6 лет в размере  $S$  млн рублей,

где  $S$  — **целое** число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

| Дата                   | Июль 2016 | Июль 2017 | Июль 2018 | Июль 2019 | Июль 2020 | Июль 2021 | Июль 2022 |
|------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Долг<br>(в млн рублей) | $S$       | $0,9S$    | $0,8S$    | $0,7S$    | $0,5S$    | $0,3S$    | 0         |

Найдите наибольшее значение  $S$ , при котором каждая из выплат будет меньше 3 млн рублей.

**6) (ЕГЭ-2018)**

15-го января планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 21 месяц.

Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- на 15-е число каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на 30 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 21-го месяца долг должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после его полного погашения составит 1604 тыс рублей.

**7) (ЕГЭ-2018)**

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 1 000 000 рублей на  $n + 1$  месяц.

Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по  $n$ -й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа  $n$ -го месяца долг составит 200 тысяч рублей;
- к 15-му числу  $n + 1$ -го месяца долг должен быть полностью погашен.

Найдите  $r$ , если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1378 тысяч рублей.

**8) 15-го января планируется взять кредит в банке на 24 месяца.**

Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение второго года кредитования нужно вернуть банку 339 тыс. рублей.

Какую сумму нужно вернуть банку в течение первого года кредитования?



171) ЕГЭ-2015

S - сумма кредита, %

| Месяц | Начисление %                         | Выплаты                      | Остаток долга |
|-------|--------------------------------------|------------------------------|---------------|
| 1     | $S + \frac{r}{100} S$                | $x + \frac{r}{100} S$        | $S - x$       |
| 2     | $(S - x) + \frac{r}{100}(S - x)$     | $x + \frac{r}{100}(S - x)$   | $S - 2x$      |
| 14    | $(S - 13x) + \frac{r}{100}(S - 13x)$ | $x + \frac{r}{100}(S - 13x)$ | $S - 14x = 0$ |

$$S = 14x, \quad x = \frac{S}{14}$$

Общая сумма выплат:

$$14x + \frac{r}{100}(14S - x(1+2+\dots+13)) =$$

$$= S + \frac{r}{100}\left(14S - \frac{S \cdot (1+13) \cdot 13}{14 \cdot 2}\right) =$$

$$= S + \frac{r}{100}\left(14S - \frac{13}{2}S\right) = S\left(1 + \frac{r}{100} \cdot \frac{15}{2}\right)$$

по условию  $S\left(1 + \frac{r}{100} \cdot \frac{15}{2}\right) > S$  на 15%.

$$\frac{S}{100\%} - 100\% \\ S\left(1 + \frac{r}{100} \cdot \frac{15}{2}\right) - 115\%$$

$$1 + \frac{r}{100} \cdot \frac{15}{2} = \frac{115}{100}$$

$$100 + \frac{15}{2}r = 115$$

$$\frac{15}{2}r = 15$$

$$\boxed{r = 2}$$

Ответ: 2



1712) ЕГЭ-2015

$S = 20$  млн. руб - кредит,  $n$  лет ( $n \in \mathbb{Z}$ )

15% годовых, общая сумма выплат 38 млн.р.

$n = ?$

|                                    | ①                  | ②                                  | ③                                      |
|------------------------------------|--------------------|------------------------------------|----------------------------------------|
| I квартал<br>(основные<br>выплаты) | $\frac{S}{n}$      | $\frac{S}{n}$                      | $\frac{S}{n}$                          |
| II квартал<br>(выплаты<br>по %)    | $\frac{15}{100} S$ | $\frac{15}{100} (S - \frac{S}{n})$ | $\frac{15}{100} (S - \frac{n-1}{n} S)$ |

Общая сумма выплат:

$$\begin{aligned}
 & n \cdot \frac{S}{n} + \frac{15}{100} \left( S n - \frac{S}{n} (1+2+\dots+(n-1)) \right) = \\
 & = S + \frac{15}{100} \left( S n - \frac{S}{n} \cdot \frac{1+n-1}{2} \cdot (n-1) \right) = \\
 & = S + \frac{15}{100} \left( S n - S \cdot \frac{n-1}{2} \right) = S \left( 1 + \frac{15}{100} \left( n - \frac{n-1}{2} \right) \right) = \\
 & = S \left( 1 + \frac{15}{100} \cdot \frac{2n - n + 1}{2} \right) = S \left( 1 + \frac{15(n+1)}{200} \right)
 \end{aligned}$$

По условию:

$$S \left( 1 + \frac{15(n+1)}{200} \right) = 38$$

$$20 \left( \frac{200 + 15n + 15}{200} \right) = 38$$

$$200 + 15n + 15 = 380$$

$$15n = 165$$

$$\boxed{n = 11} \quad \text{Кредит был взят на 11 лет}$$

Ответ: 11



17.1 3) ЕГЭ - 2015

$S$  - млн. руб - кредит на 15 лет,  $z\%$  годовых  
 Наиб. платеж  $\leq 1,9$  млн.р.  
 Наим. платеж  $\geq 0,5$  млн.р.

| год              | 1                       | 2                                                                        | 14                                   | 15                                   |
|------------------|-------------------------|--------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| Основные выплаты | $\frac{S}{15}$          | $\frac{S}{15}$                                                           | $\frac{S}{15}$                       | $\frac{S}{15}$                       |
| Выплаты по %     | $\frac{z}{100} \cdot S$ | $\frac{z}{100} (S - \frac{S}{15}) = \frac{z}{100} \cdot \frac{14}{15} S$ | $\frac{z}{100} \cdot \frac{2}{15} S$ | $\frac{z}{100} \cdot \frac{1}{15} S$ |
|                  | Наиб. платеж.           |                                                                          |                                      | Наим. платеж                         |

$$\begin{cases} \frac{S}{15} + \frac{z}{100} S \leq 1,9 \\ \frac{S}{15} + \frac{z}{100} \cdot \frac{1}{15} S \geq 0,5 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{6}{15} + \frac{6z}{100} \leq \frac{19}{10} \\ \frac{6}{15} + \frac{6z}{1500} \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{600}{15} + 6z \leq 190 \\ \frac{600}{15} + \frac{6z}{15} \geq 50 \end{cases} \quad \begin{cases} 40 + 6z \leq 190 \\ 40 + \frac{2z}{5} \geq 50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6z \leq 150 \\ \frac{2z}{5} \geq 10 \end{cases} \quad \begin{cases} z \leq 25 \\ z \geq 25 \end{cases} \quad \boxed{z = 25}$$

Кредит был взят под 25% годовых.

Ответ: 25



17. 4) ЕГЭ-2016

$P = 1$  млн. руб - кредит на 6 мес.

| Месяц | До 12 на 100<br>число месяца  | Выплаты | До 12 на 150<br>число месяца         |
|-------|-------------------------------|---------|--------------------------------------|
| 1     | $1 \cdot (1 + \frac{z}{100})$ | $a_1$   | $1(1 + \frac{z}{100}) - a_1 = 0,9$   |
| 2     | $0,9(1 + \frac{z}{100})$      | $a_2$   | $0,9(1 + \frac{z}{100}) - a_2 = 0,8$ |
| 3     | $0,8(1 + \frac{z}{100})$      | $a_3$   | $0,8(1 + \frac{z}{100}) - a_3 = 0,7$ |
| 4     | $0,7(1 + \frac{z}{100})$      | $a_4$   | $0,7(1 + \frac{z}{100}) - a_4 = 0,6$ |
| 5     | $0,6(1 + \frac{z}{100})$      | $a_5$   | $0,6(1 + \frac{z}{100}) - a_5 = 0,5$ |
| 6     | $0,5(1 + \frac{z}{100})$      | $a_6$   | $0,5(1 + \frac{z}{100}) - a_6 = 0.$  |

$$a_1 = 1(1 + \frac{z}{100}) - 0,9$$

$$a_2 = 0,9z - 0,8$$

$$a_3 = 0,8z - 0,7$$

$$+ a_4 = 0,7z - 0,6$$

$$a_5 = 0,6z - 0,5$$

$$a_6 = 0,5z$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = (1 + 0,9 + 0,8 + 0,7 + 0,6 + 0,5)z - (0,5 + 0,6 + 0,7 + 0,8 + 0,9)$$

то условием обшая сумма выплат более 1,25 млн.

$$4,5z - 3,5 > 1,25$$

$$4,5z > 4,75$$

$$z > \frac{4,75}{4,5}$$

$$z > \frac{19}{18} \Rightarrow 1 + \frac{z}{100} > 1 + \frac{1}{18}, \frac{z}{100} > \frac{1}{18}, z > \frac{100}{18}$$

$$z > 5\frac{5}{9}$$

Наименьшее целое значение  $z = 6$ .

Ответ: 6



17.1 5) ЕГЭ-2016

8 млн. руб. — сумма кредита,  $S \in \mathbb{Z}$ .

20% ; 6 лет.

Каждая выплата меньше 3 млн. руб.

Найти  $S_{\max}$ .

| к-во лет | Наисление %      | Выплаты | Остаток долга                                         |
|----------|------------------|---------|-------------------------------------------------------|
| 1        | $1,2S$           | $a_1$   | $1,2S - a_1 = 0,9S \Rightarrow a_1 = 0,3S$            |
| 2        | $1,2 \cdot 0,9S$ | $a_2$   | $1,2 \cdot 0,9S - a_2 = 0,8S \Rightarrow a_2 = 0,28S$ |
| 3        | $1,2 \cdot 0,8S$ | $a_3$   | $1,2 \cdot 0,8S - a_3 = 0,7S \Rightarrow a_3 = 0,26S$ |
| 4        | $1,2 \cdot 0,7S$ | $a_4$   | $1,2 \cdot 0,7S - a_4 = 0,5S \Rightarrow a_4 = 0,34S$ |
| 5        | $1,2 \cdot 0,5S$ | $a_5$   | $1,2 \cdot 0,5S - a_5 = 0,3S \Rightarrow a_5 = 0,3S$  |
| 6        | $1,2 \cdot 0,3S$ | $a_6$   | $1,2 \cdot 0,3S - a_6 = 0 \Rightarrow a_6 = 0,36S$    |

Каждая выплата меньше 3 млн. руб,  
достаточно проверить это условие для  
самой большой выплаты.

$$0,36S < 3$$

$$S < \frac{300}{36}$$

$$S < \frac{50}{6}$$

$$S < \frac{25}{3}$$

$$S < 8\frac{1}{3}$$

Самбольшее и целое 8 млн. руб.

Ответ: 8 млн. руб.



17.1 | 6) ЕГЭ-2018

$S$  тыс. руб. - сумма кредита,  $S$  - ?  
21 месяц, 3%.

1604 тыс. руб. - общая сумма выплат

С 1<sup>го</sup> по 20<sup>е</sup> месяц долг увеличивается на 30 тыс. руб.

В 21 месяце долг полностью погашен

| Месяц | Начисленные %                                         | Выплаты                                | Остаток долга     |
|-------|-------------------------------------------------------|----------------------------------------|-------------------|
| 1     | $S + \frac{3}{100} S$                                 | $30 + \frac{3}{100} S$                 | $S - 30$          |
| 2     | $(S - 30) + \frac{3}{100} (S - 30)$                   | $30 + \frac{3}{100} (S - 30)$          | $S - 2 \cdot 30$  |
| 20    | $(S - 19 \cdot 30) + \frac{3}{100} (S - 19 \cdot 30)$ | $30 + \frac{3}{100} (S - 19 \cdot 30)$ | $S - 20 \cdot 30$ |
| 21    | $(S - 20 \cdot 30) + \frac{3}{100} (S - 20 \cdot 30)$ | $\frac{103}{100} (S - 600)$            | 0                 |

общая сумма выплат:

$$30 \cdot 20 + \frac{3}{100} (20S - 30 \cdot (1 + 2 + \dots + 19)) + \frac{103}{100} (S - 600) =$$

$$= 600 + \frac{3}{100} (20S - \frac{30 \cdot 20 \cdot 19}{2}) + \frac{103}{100} S - 618 =$$

$$= -18 + 0,6S - 171 + 1,03S = 1,63S - 189$$

По условию общая сумма выплат 1604 тыс. р.

$$1,63 \cdot S - 189 = 1604$$

$$1,63S = 1793$$

$$S = \frac{179300}{163}$$

$$S = 1100.$$

Кредит был взят на сумму 1100 тыс. руб.

Ответ: 1100 тыс. руб.



17.1 4) ЕГЭ - 2018

$S = 1000$  тыс. руб. - сумма кредита

$n+1$  месяц;  $r\%$  в месяц;  $1378$  тыс. руб. - общая сумма выплат

С  $1^{\text{го}}$  по  $n$ -й месяц долг уменьшается на  $40$  тыс.р.

Долг на конец  $n$ -го месяца  $200$  тыс. руб.

В  $n+1$  месяце полностью погашен.

| Месяц | Платежи $\%$                                                | Выплаты                                   | Остаток долга    |
|-------|-------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|------------------|
| 1     | $S + \frac{r}{100} S$                                       | $40 + \frac{r}{100} S$                    | $S - 40$         |
| 2     | $(S - 40) + \frac{r}{100} (S - 40)$                         | $40 + \frac{r}{100} (S - 40)$             | $S - 2 \cdot 40$ |
| $n$   | $(S - (n-1) \cdot 40) + \frac{r}{100} (S - (n-1) \cdot 40)$ | $40 + \frac{r}{100} (S - (n-1) \cdot 40)$ | $200 = S - 40n$  |
| $n+1$ | $200 + \frac{r}{100} 200$                                   | $200 (1 + \frac{r}{100})$                 | 0                |

Из условия:  $200 = S - 40n$ , найдем  $n$ :

$$40n = 1000 - 200; \quad 40n = 800, \quad \boxed{n = 20}$$

Общие выплаты:

$$40n + \frac{r}{100} (Sn - 40(1+2+\dots+(n-1))) + 200(1 + \frac{r}{100}) =$$

$$= 40n + \frac{r}{100} (Sn - 40 \cdot \frac{n(n-1)}{2}) + 200 + 2r =$$

$$= 800 + \frac{r}{100} (1000 \cdot 20 - 20 \cdot 20 \cdot 19) + 200 + 2r =$$

$$= 800 + 200r - 4 \cdot 19r + 200 + 2r = 1000 + 126r.$$

По условию общая сумма выплат  $1378$  тыс.р.

$$1000 + 126r = 1378$$

$$126r = 378$$

$$\boxed{r = 3}$$

Кредит был взят под  $3\%$ .

Ответ: 3



17.1 8)

$S$  (тыс. руб) - сумма кредита  
24 месяца; 2% в месяц

$x$  (тыс. руб) - сумма, на которую долг  
равномерно уменьшается

339 тыс. руб - выплаты за второй год.

Найти выплаты за первый год.

| Месяц | Начисление %                        | Выплаты                     | Остаток долга |
|-------|-------------------------------------|-----------------------------|---------------|
| 1     | $S + \frac{1}{50}S$                 | $x + \frac{1}{50}S$         | $S - x$       |
| 12    | $(S - 11x) + \frac{1}{50}(S - 11x)$ | $x + \frac{1}{50}(S - 11x)$ | $S - 12x$     |
| 13    | $(S - 12x) + \frac{1}{50}(S - 12x)$ | $x + \frac{1}{50}(S - 12x)$ | $S - 13x$     |
| 24    | $(S - 23x) + \frac{1}{50}(S - 23x)$ | $x + \frac{1}{50}(S - 23x)$ | $S - 24x = 0$ |

Выплаты за второй год (с 13-го месяца по 24-й месяц):

$$\begin{aligned}
 & 12x + \frac{1}{50}(12S - x(12 + 13 + \dots + 23)) = \\
 & = 12x + \frac{1}{50}(12S - 35.6x) = 12x - \frac{35.6}{50}x + \frac{12}{50}S = \\
 & = \frac{12}{24}S - \frac{7.6}{10.24}S + \frac{6}{25}S = \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{40} + \frac{6}{25}\right)S = \\
 & = \frac{500 - 175 + 240}{1000}S = \frac{565}{1000}S = \frac{113}{200}S.
 \end{aligned}$$

По условию выплаты за второй год 339 тыс. руб

$$\frac{113}{200}S = 339 \Rightarrow S = \frac{339 \cdot 200}{113}, \quad \boxed{S = 600}$$

Выплаты за первый год (с 1-го месяца по 12-й месяц):

$$\begin{aligned}
 & 12x + \frac{1}{50}(12S - x(1 + 2 + \dots + 11)) = 12x + \frac{1}{50}(12S - 6.11x) = \\
 & = 12x - \frac{6.11}{50}x + \frac{12}{50}S = \frac{12}{24}S - \frac{6.11}{50.24}S + \frac{12}{50}S = \\
 & = \left(\frac{1}{2} - \frac{11}{50 \cdot 4} + \frac{12}{50}\right)S = \frac{100 - 11 + 48}{50 \cdot 4}S = \frac{137}{200} \cdot 600 = 411
 \end{aligned}$$

411 тыс. руб - выплаты за первый год

Ответ: 411 тыс. руб.



### Задание 17.1. Ответы.

- 1) 2.
- 2) 11.
- 3) 25.
- 4) 6.
- 5) 8 млн руб.
- 6) 1100 тыс руб.
- 7) 3.
- 8) 411 тыс руб.



# Задание 17.1 (ДЗ). Дифференцированные платежи.

- 1) 15-го января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего месяца;
  - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
  - 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите  $r$ .

- 2) В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 14% по сравнению с концом предыдущего года;
  - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
  - в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения составит 24 млн рублей?

- 3) В июле планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на срок 12 лет. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего года;
  - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
  - в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите  $r$ , если известно, что выплаты за 5-ый год составят 1,35 млн рублей.

- 4) 15-го января планируется взять кредит в банке на сумму 1 млн рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на  $r$  процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где  $r$  — **целое** число;
  - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
  - 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей:

| Дата                   | 15.01 | 15.02 | 15.03 | 15.04 | 15.05 | 15.06 | 15.07 |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Долг<br>(в млн рублей) | 1     | 0,9   | 0,8   | 0,6   | 0,4   | 0,2   | 0     |

Найдите наибольшее значение  $r$ , при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.



- 5) В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на 6 лет в размере  $S$  млн рублей, где  $S$  — **целое** число. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
  - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
  - в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

| Дата                   | Июль 2020 | Июль 2021 | Июль 2022 | Июль 2023 | Июль 2024 | Июль 2025 | Июль 2026 |
|------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Долг<br>(в млн рублей) | $S$       | $0,9S$    | $0,8S$    | $0,7S$    | $0,6S$    | $0,3S$    | 0         |

Найдите наибольшее значение  $S$ , при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн рублей.

- 6) 15-го января планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 17 месяцев. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
  - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
  - на 15-е число каждого месяца с 1-го по 16-й долг должен быть на 50 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
  - к 15-му числу 17-го месяца долг должен быть полностью погашен.
- Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после его полного погашения составит 1070 тыс рублей.

- 7) 15-го декабря планируется взять кредит в банке на 1 300 000 рублей на  $n + 1$  месяц. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего месяца;
  - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
  - 15-го числа каждого месяца с 1-го по  $n$ -й долг должен быть на 100 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
  - 15-го числа  $n$ -го месяца долг составит 200 тысяч рублей;
  - к 15-му числу  $n + 1$ -го месяца кредит должен быть полностью погашен.
- Найдите  $r$ , если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1435 тысяч рублей.

- 8) 15-го января планируется взять кредит в банке на 36 месяца. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
  - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
  - 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
- Известно, что в течение второго года кредитования нужно вернуть банку 711 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

### Задание 17.1 (ДЗ). Ответы.

- 1) 1,6.
- 2) 19.
- 3) 10.
- 4) 5.
- 5) 12 млн руб.
- 6) 900 тыс руб.
- 7) 1,5.
- 8) 1800 тыс руб.



## Задание 17.2. Аннуитетные платежи.

### 1) (ЕГЭ-2015)

В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 2,16 млн рублей.

Найдите сумму кредита, если известно, что он был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за 3 года)?

### 2) (ЕГЭ-2015)

В июле планируется взять кредит на сумму 3 355 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга

Сколько рублей нужно платить ежегодно, чтобы кредит был полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года)?

### 3) (ЕГЭ-2015)

В июле планируется взять кредит на сумму 5 005 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом прошлого года.
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей общая сумма выплат будет больше, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за 3 года) по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за 2 года)?

### 4) (ЕГЭ-2015)

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 1 000 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Найдите  $r$ , если известно, что кредит должен быть полностью погашен за два года, причем в первый год выплаты составят 580 000 руб., а во второй — 708 000 рублей.

### 5) (ЕГЭ-2015)

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 1 500 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

На какое минимальное количество лет можно взять кредит при условии, чтобы ежегодные выплаты не превышали 400 000 рублей?

### 6) (ЕГЭ-2016)

В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 5,5 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо произвести выплату;
- в июле 2017 и 2018 годов долг остается равным 5,5 млн рублей;
- суммы выплат в 2019 и 2020 годы равны;
- к июлю 2020 года кредит должен быть выплачен полностью.

Найдите  $r$ , если известно, что общая сумма выплат составит 9,4 млн рублей.

### 7) (ЕГЭ-2017)

В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Найдите  $r$ , если известно, что если ежегодно выплачивать по 777 600 рублей, то кредит будет погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 1 317 600 рублей, то кредит будет погашен за 2 года?

### 8) (ЕГЭ-2017)

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Найдите сумму кредита, если известно, что кредит должен быть полностью погашен тремя равными платежами (то есть за 3 года) и общая сумма выплат будет на 77 200 рублей больше суммы кредита?

[172] 1) ЕГЭ-2015 Сумм. руб - сумма кредита

| лог | Начисление %                   | Выплаты | Остаток долга             |
|-----|--------------------------------|---------|---------------------------|
| 1   | $1,2S$                         | $2,16$  | $1,2S - 2,16$             |
| 2   | $(1,2S - 2,16) \cdot 1,2$      | $2,16$  | $1,2(1,2S - 2,16) - 2,16$ |
| 3   | $1,2(1,2(1,2S - 2,16) - 2,16)$ | $2,16$  | $0$                       |

$$1,2(1,2(1,2(1,2S - 2,16) - 2,16) - 2,16) - 2,16 = 0$$

$$1,2^3 S - 1,2^2 \cdot 2,16 - 1,2 \cdot 2,16 - 2,16 = 0.$$

$$1,2^3 S = 1,2^2 \cdot 2,16 + 1,2 \cdot 2,16 + 2,16$$

$$\left(\frac{6}{5}\right)^3 \cdot S = \frac{216}{100} \left(\frac{36}{25} + \frac{6}{5} + 1\right)$$

$$\frac{216}{125} \cdot S = \frac{54}{25} \left(\frac{36+30+25}{25}\right)$$

$$\frac{216}{125} S = \frac{54}{25} \cdot \frac{91}{25}$$

$$216 S = \frac{54 \cdot 91}{5}$$

$$S = \frac{91}{5 \cdot 4}$$

$$S = \frac{91}{20}$$

$$S = 4,55$$

4,55 млн. руб - сумма кредита

Ответ: 4,55 млн. руб



17.2) 2) ЕГЭ - 2015

$S = 3355000$  руб - сумма кредита  
20% годовых, 4 равных платежа (руб)

$$1,2^4 S - 1,2^3 x - 1,2^2 x - 1,2 x - x = 0$$

$$\left(\frac{6}{5}\right)^4 S = \left(\left(\frac{6}{5}\right)^3 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \frac{6}{5} + 1\right) x$$

$$\frac{36 \cdot 36}{25 \cdot 25} \cdot S = \left(\frac{216}{125} + \frac{36}{25} + \frac{6}{5} + 1\right) x$$

$$\frac{36 \cdot 36}{25 \cdot 25} \cdot S = \frac{216 + 180 + 150 + 125}{125} \cdot x$$

$$\frac{36 \cdot 36}{5} \cdot S = 671 x$$

$$x = \frac{36 \cdot 36 \cdot 3.355.000}{5 \cdot 671}$$

$$x = \frac{36 \cdot 36 \cdot 5000}{5}$$

$$x = 1296000$$

Ежегодный платеж должен быть  
1296.000 руб.

Ответ: 1.296.000 руб.



17.2) 3) ЕГЭ-2015

$S = 5.005.000$  руб - сумма кредита

I вариант Три равных платежа (по 2 руб.)

$$1,2^3 S - 1,2^2 x - 1,2x - x = 0$$

$$(1,2^2 + 1,2 + 1)x = 1,2^3 S$$

$$\left(\frac{36}{25} + \frac{6}{5} + 1\right)x = \frac{216}{125} S$$

$$\frac{36+30+25}{25} x = \frac{216}{125} S$$

$$\frac{91}{25} x = \frac{216}{125} S$$

$$x = \frac{216}{5 \cdot 91} S$$

Общая сумма выплат:  $3x = \frac{3 \cdot 216}{5 \cdot 91} S$

II вариант Два равных платежа (по 4 руб.)

$$1,2^2 S - 1,2y - y = 0$$

$$(1,2 + 1)y = 1,2^2 S$$

$$y = \frac{1,44}{2,2} S$$

$$y = \frac{144}{220} S$$

Общая сумма выплат:  $2y = \frac{2 \cdot 144}{2,2} S = \frac{72}{1,1} S$

На сколько больше?  $3x - 2y = ?$

$$S \left( \frac{3 \cdot 216}{5 \cdot 91} - \frac{72}{5 \cdot 11} \right) = S \cdot \frac{72}{5} \left( \frac{9}{91} - \frac{1}{11} \right) = S \cdot \frac{72}{5} \cdot \frac{8}{91 \cdot 11} =$$

$$= \frac{5.005.000 \cdot 72 \cdot 8}{5 \cdot 91 \cdot 11} = 8 \cdot 72 \cdot 1000 = 576.000$$

В I варианте сумма выплат будет больше на 576.000 руб.

Ответ: 576.000 руб.



17.2 4) ЕГЭ-2015

$S = 1$  млн. руб - сумма кредита  
 $\% \quad \% - ?$

$a_1 = 0,58$  млн. руб - первая выплата

$a_2 = 0,408$  млн. руб - вторая выплата

Пусть  $1 + \frac{\%}{100} = t$ .

$$t^2 S - ta_1 - a_2 = 0.$$

$$t^2 \cdot 1 - 0,58t - 0,408 = 0.$$

$$1000t^2 - 580t - 408 = 0.$$

$$500t^2 - 290t - 354 = 0$$

$$t = \frac{290 \pm \sqrt{84100 + 708000}}{1000}$$

$$t = \frac{290 \pm \sqrt{792100}}{1000}$$

$$t = \frac{290 \pm 890}{1000}$$

$$\left[ t = \frac{1180}{1000} \right.$$

$$t = -\frac{600}{1000} \text{ не подходит, т.к. } t > 0.$$

$$t = \frac{118}{100}$$

$$1 + \frac{\%}{100} = 1 + \frac{18}{100} \Rightarrow \boxed{\% = 18}$$

18% годовых.

Ответ: 18



17.2 5) ЕГЭ-2015

$S = 1500$  тыс. руб. — сумма кредита

$n$  лет,  $n_{\text{накл.}}$ ?, 10% годовых

$x_n$  тыс. руб. — ежегодные выплаты,  $x_n \leq 400$  тыс.р.

| год | начисление %                             | выплаты | остаток долга                             |
|-----|------------------------------------------|---------|-------------------------------------------|
| 1   | $1,1S$                                   | $x_1$   | $1,1S - x_1$                              |
| 2   | $1,1(1,1S - x_1)$                        | $x_2$   | $1,1^2S - 1,1x_1 - x_2$                   |
| $n$ | $1,1(1,1^{n-1}S - 1,1^{n-2}x_1 - \dots)$ | $x_n$   | $1,1^nS - 1,1^{n-1}x_1 - \dots - x_n = 0$ |

$$1,1^n S - 1,1^{n-1} x_1 - 1,1^{n-2} x_2 - \dots - x_n = 0.$$

$$\left(\frac{11}{10}\right)^n \cdot 1500 = \left(\frac{11}{10}\right)^{n-1} x_1 + \left(\frac{11}{10}\right)^{n-2} x_2 + \dots + x_n$$

Все ежегодные выплаты  $\leq 400$  тыс.р.

$$\left(\frac{11}{10}\right)^n \cdot 1500 \leq \left(\frac{11}{10}\right)^{n-1} \cdot 400 + \left(\frac{11}{10}\right)^{n-2} \cdot 400 + \dots + 400$$

$$\frac{11^n}{10^n} \cdot \frac{15}{4} \leq 1 + \frac{11}{10} + \left(\frac{11}{10}\right)^2 + \dots + \left(\frac{11}{10}\right)^{n-2} + \left(\frac{11}{10}\right)^{n-1}$$

Сумма геометрической прогрессии,  
в которой  $b_1 = 1$ ,  $q = \frac{11}{10}$ ,  $n$ -чл-ва.

$$\frac{11^n}{10^n} \cdot \frac{15}{4} \leq \frac{1 \cdot \left(\frac{11^n}{10^n} - 1\right)}{\frac{11}{10} - 1}$$

$$\frac{11^n}{10^n} \cdot \frac{15}{4} \leq \left(\frac{11^n - 10^n}{10^n}\right) \cdot 10$$

$$11^n \cdot 15 \leq (11^n - 10^n) \cdot 40$$

$$25 \cdot 11^n \geq 40 \cdot 10^n$$

$$\left(\frac{11}{10}\right)^n \geq \frac{8}{5}$$

Наименьшее число  $n = 5$ .

Если  $n=1$ , то  $\frac{11}{10} \geq \frac{8}{5}$  неверно

Если  $n=2$ , то  $\frac{121}{100} \geq \frac{8}{5}$  неверно

Если  $n=3$ , то  $\frac{1331}{1000} \geq \frac{8}{5}$  неверно

Если  $n=4$ , то  $\frac{14641}{10000} \geq \frac{8}{5}$  неверно

Если  $n=5$ , то  $\frac{161051}{100000} \geq \frac{8}{5}$  верно

Ответ: 5.



17.8) 6) ЕГЭ - 2016

$S = 5,5$  млн. руб - сумма кредита  
 $r\%$  годовых, 4 года. Пусть  $1 + \frac{r}{100} = t$ ,  $t > 0$ .  
 Общая сумма выплат 9,4 млн. руб

| год | Начисление %  | Выплаты    | остаток долга                |
|-----|---------------|------------|------------------------------|
| 1   | $5,5 \cdot t$ | $5,5(t-1)$ | $5,5$                        |
| 2   | $5,5t$        | $5,5(t-1)$ | $5,5$                        |
| 3   | $5,5t$        | $x$        | $5,5t - x$                   |
| 4   | $(5,5t - x)t$ | $x$        | $t^2 \cdot 5,5 - tx - x = 0$ |

$$\begin{cases} t^2 \cdot 5,5 - tx - x = 0 \\ 2(5,5(t-1) + x) = 9,4 \Rightarrow x = 10,2 - 5,5t \end{cases}$$

$$5,5t^2 - t(10,2 - 5,5t) - (10,2 - 5,5t) = 0$$

$$5,5t^2 - 10,2t + 5,5t^2 - 10,2 + 5,5t = 0$$

$$11t^2 - 4,7t - 10,2 = 0$$

$$110t^2 - 47t - 102 = 0$$

$$t = \frac{47 \pm \sqrt{2209 + 4 \cdot 110 \cdot 102}}{220} = \frac{47 \pm 217}{220}$$

$$\begin{cases} t = \frac{264}{220} \\ t = \frac{-170}{220} \text{ не подходит, т.к. } t > 0. \end{cases}$$

$$t = \frac{6}{5}$$

$$1 + \frac{r}{100} = 1 + \frac{1}{5}$$

$$\frac{r}{100} = \frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{r = 20}$$

Кредит был взят под 20% годовых.

Ответ: 20



17.2) 4) ЕГЭ - 2017

$S$  тыс. руб. - сумма кредита

$r\%$  годовых,  $r$  - ? Пусть  $1 + \frac{r}{100} = t$ ,  $t > 0$

I вариант выплаты: 4 года по 444,6 тыс. руб.

II вариант выплаты: 2 года по 1317,6 тыс. руб.

$$\begin{cases} t^4 S - t^3 \cdot 444,6 - 444,6 \cdot t^2 - t \cdot 444,6 - 444,6 = 0 \\ t^2 S - t \cdot 1317,6 - 1317,6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^4 S - t^3 \cdot 444,6 - 444,6 \cdot t^2 - t \cdot 444,6 - 444,6 = 0 \\ t^2 S - t \cdot 1317,6 - 1317,6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^4 S = 444,6 (t^3 + t^2 + t + 1) \\ t^2 S = 1317,6 (t + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^4 S = 444,6 (t^3 + t^2 + t + 1) \\ t^2 S = 1317,6 (t + 1) \end{cases}$$

Разделим первое уравнение на второе:

$$t^2 = \frac{444,6}{1317,6} \cdot \frac{t^2(t+1) + (t+1)}{t+1}$$

$$t^2 = \frac{36}{61} \cdot \frac{(t+1)(t^2+1)}{t+1}$$

$$t^2 = \frac{36}{61} (t^2 + 1)$$

$$t^2 - \frac{36}{61} t^2 = \frac{36}{61}$$

$$25 t^2 = 36$$

$$t = \frac{6}{5}, \text{ т.к. } t > 0.$$

$$1 + \frac{r}{100} = 1 + \frac{1}{5}$$

$$\frac{r}{100} = \frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{r = 20}$$

Кредит был взят под 20% годовых.

Ответ: 20.



17.2 8) ЕГЭ-2017

$S$  тыс. руб. - сумма кредита,  $S$  - ?  
 20% годовых; 3 равных платежа  
 Общая сумма выплат на 77,2 тыс. руб.  
 больше суммы кредита.

| лог | Начисление %         | Выплата | остаток долга                    |
|-----|----------------------|---------|----------------------------------|
| 1   | $1,2S$               | $x$     | $1,2S - x$                       |
| 2   | $1,2(1,2S - x)$      | $x$     | $1,2^2S - 1,2x$                  |
| 3   | $1,2(1,2^2S - 1,2x)$ | $x$     | $1,2^3S - 1,2^2x - 1,2x - x = 0$ |

общая сумма выплат ( $3x$ ) больше  
 суммы кредита ( $S$ ) на 77,2 тыс. руб.  
 $3x - S = 77,2 \Rightarrow x = \frac{77,2 + S}{3}$

$$1,2^3 S = x(1,2^2 + 1,2 + 1)$$

$$\left(\frac{6}{5}\right)^3 \cdot S = \frac{77,2 + S}{3} \cdot \left(\frac{36}{25} + \frac{6}{5} + 1\right)$$

$$\frac{216}{125} S = \frac{77,2 + S}{3} \cdot \frac{91}{25} \quad / \cdot (75 \cdot 5)$$

$$216 \cdot 3 S = 91 \cdot 5 (77,2 + S)$$

$$648 S = 35126 + 455 S$$

$$193 S = 35126$$

$$S = 182$$

Кредит был взят на сумму 182 тыс. руб.

Ответ: 182 тыс. руб.

## Задание 17.2. Ответы.

- 1) 4,55 млн руб.
- 2) 1 296 000 руб.
- 3) 576 000 руб.
- 4) 18.
- 5) 5 лет.
- 6) 20.
- 7) 20.
- 8) 182 тыс руб.



## Задание 17.2 (ДЗ). Аннуитетные платежи.

- 1) В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:  
— каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;  
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Найдите сумму кредита, если известно, что он был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за 3 года) и общая сумма выплат составила 1 597 200 рублей?

- 2) В июле планируется взять кредит на сумму 1 006 500 рублей. Условия его возврата таковы:  
— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;  
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга

Сколько рублей будет выплачено банку, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года)?

- 3) В июле планируется взять кредит на сумму 9 394 000 рублей. Условия его возврата таковы:  
— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом прошлого года.  
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей общая сумма выплат будет больше, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года) по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за 2 года)?

- 4) В июле планируется взять кредит в банке на сумму 500 000 рублей. Условия его возврата таковы:  
— каждый январь долг возрастает на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего года;  
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Найдите  $r$ , если известно, что кредит должен быть полностью погашен за два года, причем в первый год выплаты составят 310 000 руб., а во второй — 280 000 рублей.

- 5) В июле планируется взять кредит в банке на сумму 1 400 000 рублей. Условия его возврата таковы:  
— каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;  
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

На какое минимальное количество лет можно взять кредит при условии, чтобы ежегодные выплаты не превышали 330 000 рублей?

- 6) В июле 2020 года планируется взять кредит в размере 8,4 млн рублей. Условия его возврата таковы:  
— каждый январь долг увеличивается на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего года;  
— с февраля по июнь каждого года необходимо произвести выплату;  
— в июле 2021 и 2022 годов долг остается равным первоначальному;  
— суммы выплат в 2023 и 2024 годы равны;  
— к июлю 2024 года кредит должен быть выплачен полностью.

Найдите  $r$ , если известно, что общая сумма выплат составит 11,36 млн рублей.

- 7) В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:  
— каждый январь долг возрастает на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего года;  
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Найдите  $r$ , если известно, что если ежегодно выплачивать по 439 230 рублей, то кредит будет погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 802 230 рублей, то кредит будет погашен за 2 года?

- 8) В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:  
— каждый январь долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;  
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Найдите сумму кредита, если известно, что кредит должен быть полностью погашен двумя равными платежами (то есть за 2 года) и общая сумма выплат будет на 297 000 рублей больше суммы кредита?

### Задание 17.2 (ДЗ). Ответы.

1) 1 324 000 руб.

2) 1 555 200 руб.

3) 2 217 600 руб.

4) 12.

5) 6 лет.

6) 10.

7) 10.

8) 1 290 000 руб.



### Задание 17.3. Экономические задачи. Разное.

#### 1) (ЕГЭ-2015)

Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно  $t^2$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $2t$  единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно  $t^2$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $5t$  единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Владимир платит рабочему 500 рублей.

Владимиру нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

#### 2) (ЕГЭ-2015)

Антон является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно  $t^2$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $t$  единиц товара.

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Антон платит рабочему 250 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, — 200 рублей.

Антон готов выделять 900 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

#### 3) (ЕГЭ-2015)

Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство  $x$  тыс. единиц продукции на таком заводе равны  $0,5x^2 + 2x + 6$  млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене  $p$  тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит  $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$ . Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении  $p$  строительство завода окупится не более чем за 3 года?

#### 4) (ЕГЭ-2015)

Зависимость объема  $Q$  (в шт) купленного у фирмы товара от цены  $P$  (в руб. за шт.) выражается формулой  $Q = 15000 - P$ ,  $1000 \leq P \leq 15000$ . Доход от продажи товара составляет  $PQ$  рублей. Затраты на производство  $Q$  единиц товара составляют  $3000Q + 5000000$  рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство.

Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену продукции на 20%, однако ее прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

#### 5) (ЕГЭ-2016)

Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет **целое** число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 25 млн рублей.

#### 6) (ЕГЭ-2016)

Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на  $x$  млн рублей, где  $x$  — целое число. Найдите наименьшее значение  $x$ , при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 7 млн рублей.

#### 7) (ЕГЭ-2017)

Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят  $t^2$  тысяч рублей в конце года  $t$  ( $t = 1; 2; \dots$ ). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться в  $(1 + r)$  раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях  $r$  это возможно?

#### 8) (ЕГЭ-2018)

В регионе  $A$  среднемесячный доход на душу населения в 2014 году составлял 43 740 рублей и ежегодно увеличивался на 25%.

В регионе  $B$  среднемесячный доход на душу населения в 2014 году составлял 60 000 рублей. В течение трёх лет суммарный доход жителей региона  $B$  увеличивался на 17% ежегодно, а население увеличивалось на  $m\%$  ежегодно.

В 2017 году среднемесячный доход на душу населения в регионах  $A$  и  $B$  стал одинаковым. Найдите  $m$ .

173 1) ЕГЭ-2015

Пусть I завод производит  $2x$  ед. товара,  
тогда II завод  $(580-2x)$  ед. товара.

На I заводе рабочие будут работать  
суммарно  $x^2$  часов/неделю, а на  
втором заводе  $\left(\frac{580-2x}{5}\right)^2$  часов/неделю.

Вместе они отработают

$x^2 + \left(\frac{580-2x}{5}\right)^2$  часов/неделю и им  
заплатят  $S(x) = 500 \left( x^2 + \left(\frac{580-2x}{5}\right)^2 \right)$  руб.  
Найти  $S(x)$  наименьшую.

$$S(x) = 500 \cdot \frac{1}{25} (25x^2 + 580^2 - 4 \cdot 580x + 4x^2) =$$
$$= 20 (29x^2 - 4 \cdot 580x + 580^2).$$

$S(x)$  функция квадратичная, график-парабола,  
ветви вверх, своё наименьшее значение  
будет принимать в вершине параболы.

$$x_0 = \frac{4 \cdot 580}{2 \cdot 29} = 2 \cdot 20 = 40.$$

$$S_{\text{наим.}} = S(40) = 20 (29 \cdot 1600 - 4 \cdot 580 \cdot 40 + 580^2) =$$
$$= 20 \cdot 100 (29 \cdot 16 - 16 \cdot 58 + 58^2) =$$

$$= 2000 \cdot 58 (8 - 16 + 58) = 116000 \cdot 50 = 5800000$$

Рабочим выплатят 5.800.000 руб. в неделю.

Ответ: 5.800.000 руб.



17.3) 2). ЕГЭ-2015

Пусть на I заводе производят  $x$  ед. прод,  
и работают  $x^2$  часов/неделю.

На II заводе  $y$  ед. продукции и  $y^2$  час/нед.

Когда денег на оплату труда  
всем рабочим будет выделено

$250x^2 + 200y^2$ , что по условию 900.000 руб.

$$250x^2 + 200y^2 = 900.000 \quad / : 50$$

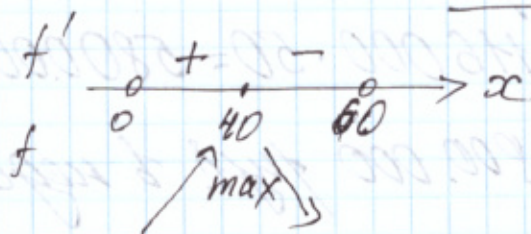
$$5x^2 + 4y^2 = 18.000$$

$$y^2 = \frac{18.000 - 5x^2}{4} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{18.000 - 5x^2}}{2}$$

Составим  $f(x) = x + \frac{\sqrt{18.000 - 5x^2}}{2}$  и найдем  
её наибольшее для значения  $\underline{x \in (0; 60)}$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{-10x}{2\sqrt{18.000 - 5x^2}} = 1 - \frac{5x}{2\sqrt{18.000 - 5x^2}} =$$
$$= \frac{2\sqrt{18.000 - 5x^2} - 5x}{2\sqrt{18.000 - 5x^2}}$$

$$f'(x) = 0, \quad 2\sqrt{18.000 - 5x^2} = 5x$$
$$4(18.000 - 5x^2) = 25x^2$$
$$45x^2 = 4 \cdot 18.000$$
$$x^2 = 1600$$
$$x = 40$$



$$f_{\text{наиб.}} = f(40) = 40 + \frac{\sqrt{18.000 - 5 \cdot 1600}}{2} =$$
$$= 40 + \frac{100}{2} = 90$$

90 - наибольшее количество единиц тов.

Ответ: 90



Строительство нового завода 78 млн. руб  
 $x$  ед. продукции в год

затраты  $(0,5x^2 + 2x + 6)$  млн. руб. в год  
 Цена  $p$  тыс. руб. за 1 ед.

Прибыль за год  $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$

Работать  $\leq 3$  года, затраты должны окупиться.

Прибыль должна быть наибольшей.

Найти  $p$  макс.

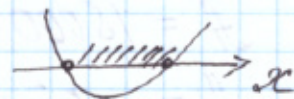
$$3(px - 0,5x^2 - 2x - 6) \geq 78$$

$$3px - 1,5x^2 - 6x - 18 \geq 78$$

$$1,5x^2 + 6x - 3px + 96 \leq 0$$

$$3x^2 + 2(6-3p)x + 192 \leq 0.$$

$$x = \frac{3p-6 \pm \sqrt{9p^2-36p+36-192 \cdot 3}}{3}$$

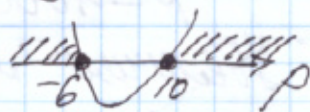


Решения  $x$  неравенства должны быть,  
 значит  $\Delta \geq 0$ .

$$9p^2 - 36p + 36 - 192 \cdot 3 \geq 0$$

$$p = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 9(36 - 192 \cdot 3)}}{9} = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 324 + 9 \cdot 3 \cdot 192}}{9}$$

$$= \frac{18 \pm \sqrt{9 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 96}}{9} = \frac{18 \pm 72}{9}$$



$$p > 0 \Rightarrow p = \frac{18+72}{9} = \frac{90}{9} = 10$$

$$p_{\text{макс.}} = 10$$

Ответ: 10



17.3 4) ЕГЭ-2015

$$Q = 15000 - P, \quad 1000 \leq P \leq 15000$$

$Q$  (шт) - объем выпускаемой продукции

$P$  (руб) - цена 1 шт.

$PQ$  (руб) - доход

$3000Q + 5.000.000$  (руб) - затраты на  $Q$  шт.

$A = PQ - 3000Q - 5.000.000$  (руб) - прибыль.

Если цену уменьшить на 20%, то прибыль <sup>не изменится</sup>

На ск. % надо увеличить теперь цену, чтобы прибыль была наибольшей.

$$A = P(15000 - P) - 3000(15000 - P) - 5000.000$$

$$A = 15000P - P^2 - 45000000 + 3000P - 5.000.000$$

$$A = -P^2 + 18.000P - 50.000.000.$$

Цена уменьшилась на 20%,  $P_2 = 0,8P$ .

$$A_1 = -(0,8P)^2 + 18.000 \cdot 0,8P - 50.000.000, \quad A = A_1$$

$$-P^2 + 18.000P - 50.000.000 = -0,64P^2 + 18.000 \cdot 0,8P - 50.000.000$$

$$0,36P^2 + 18.000(0,8 - 1)P = 0.$$

$$36P^2 - 360000P = 0 \quad P \neq 0 \quad P = 10.000 \Rightarrow P_1 = 8.000$$

$P_1$  увеличим на  $\frac{z}{100}$ ,  $P_2 = 8000(1 + \frac{z}{100})$ ,

Пусть  $1 + \frac{z}{100} = t$ , тогда  $P_2 = 8.000t$

$$A_2 = -(8000t)^2 + 18.000 \cdot 8000t - 50.000.000.$$

$$A_2 = -64.000.000t^2 + 144.000.000t - 50.000.000$$

$A_2$  наибольшая в вершине

$$t_0 = \frac{-144.000.000}{-2 \cdot 64.000.000} = \frac{9}{8}$$

$$1 + \frac{z}{100} = \frac{9}{8}; \quad \frac{z}{100} = \frac{1}{8}, \quad z = \frac{100}{8} = 12,5, \quad \boxed{12,5\%}$$

Ответ: 12,5



17.3 5) ЕГЭ-2016

$S$  млн. руб. - сумма вклада, 4 года  
 10% годовых погашение 3 и 4 год на З.м.  
 Через 4 года вклад будет меньше 25 млн.р.  
 Найдите  $S$  наиб., если  $S \in \mathbb{Z}$ .

| год | Начало года            | Дополн. взнос | Конец года (начисление %)       |
|-----|------------------------|---------------|---------------------------------|
| 1   | $S$                    | —             | $1,1S$                          |
| 2   | $1,1S$                 | —             | $1,1^2S$                        |
| 3   | $1,1^2S$               | 3             | $1,1(1,1^2S + 3)$               |
| 4   | $1,1^3S + 1,1 \cdot 3$ | 3             | $1,1(1,1^3S + 1,1 \cdot 3 + 3)$ |

По условию  $1,1(1,1^3S + 1,1 \cdot 3 + 3) < 25$

$$1,1^4S + 1,21 \cdot 3 + 1,1 \cdot 3 < 25$$

$$\left(\frac{11}{10}\right)^4 S < 25 - 3,63 - 3,3$$

$$\frac{11^4}{10000} S < 18,07$$

$$S < \frac{180700}{121 \cdot 121}$$

$$S < \frac{180700}{14641}$$

$$S < 12 \frac{5008}{14641}$$

$$\frac{11111116}{12 \quad 13} \rightarrow S$$

Наибольшее целое  $S = 12$

Первоначальной вклад 12 млн. руб

Ответ: 12 млн. руб



17.3) 6) ЕГЭ-2016

$S = 10$  млн. руб. — вклад; 4 года; 10% годовых  
 Пополнение на  $x$  млн. руб. в 3<sup>й</sup> год, в 4<sup>й</sup> год.  
 В конце 4<sup>го</sup> года банк начисляет  
 больше 7 млн. руб. Найти наиб. целое  $x$ .

| год | Начало года             | Форм. взнос | Конец года (начисление %)        |
|-----|-------------------------|-------------|----------------------------------|
| 1   | 10                      | —           | $1,1 \cdot 10$                   |
| 2   | $1,1 \cdot 10$          | —           | $1,1^2 \cdot 10$                 |
| 3   | $1,1^2 \cdot 10$        | $x$         | $1,1(1,1^2 \cdot 10 + x)$        |
| 4   | $1,1^3 \cdot 10 + 1,1x$ | $x$         | $1,1(1,1^3 \cdot 10 + 1,1x + x)$ |

По условию банковские начисления  
 за 4 года составляют больше 7 млн. р.

$$(1,1^4 \cdot 10 + 1,1^2 x + 1,1x) - (10 + 2x) > 7$$

$$1,21x + 1,1x - 2x > 7 + 10 - 1,1^4 \cdot 10$$

$$0,31x > 17 - 14,641$$

$$0,31x > 2,359$$

$$x > \frac{2359}{310}$$

$$x > 7 \frac{189}{310}$$

Наименьшее целое  $x = 8$

Ответ: 8 млн. руб.



Купившие пенсионный фонд продали ценные бумаги в конце года  $t$ , тогда они будут стоить  $t^2$  тыс. руб., и на эту сумму банк будет начислять % оставшиеся  $(25-t)$  лет.

Найдем сумму в конце 25<sup>го</sup> года:

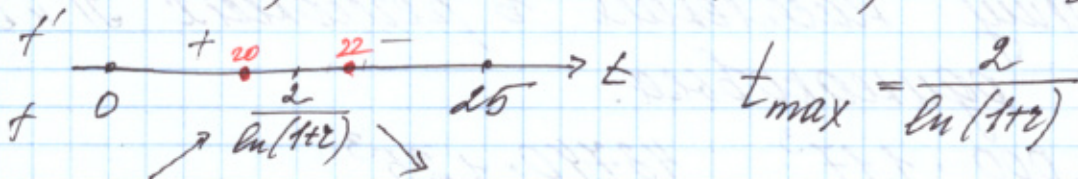
$$f(t) = t^2 \cdot (1+z)^{25-t}$$

Исследовать эту функцию:

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2t \cdot (1+z)^{25-t} + t^2 \cdot (1+z)^{25-t} \cdot (-1) \cdot \ln(1+z) = \\ &= t \cdot (1+z)^{25-t} \cdot (2 - t \cdot \ln(1+z)) = \\ &= t \cdot (1+z)^{25-t} \cdot (2 - t \cdot \ln(1+z)). \end{aligned}$$

$$t > 0; (1+z)^{25-t} > 0;$$

$$f'(t) = 0, \quad 2 - t \cdot \ln(1+z) = 0, \quad t = \frac{2}{\ln(1+z)}$$



Исследования показали, что продавать ценные бумаги надо в конце 21<sup>го</sup> года, значит

$$\begin{cases} f(21) > f(20) \\ f(21) > f(22) \end{cases} \begin{cases} 21^2(1+z)^4 > 20^2(1+z)^5 \\ 21^2(1+z)^4 > 22^2(1+z)^3 \end{cases} \begin{cases} 1+z < \frac{441}{400} \\ 1+z > \frac{484}{441} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z < \frac{41}{400} \\ z > \frac{43}{441} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{43}{441} < z < \frac{41}{400}}$$

Ответ:  $\frac{43}{441} < z < \frac{41}{400}$



17.3 8) ЕГЭ-2018

(А)

2009 средний месячный доход  
43740 руб/мес.

2014 г.  $43740 \left(1 + \frac{25}{100}\right) = 43740 \cdot 1,25$

2015 г.  $43740 \cdot 1,25^2$

2016 г.  $43740 \cdot 1,25^3$

2017 г.  $43740 \cdot 1,25^3$

(В)

2014 г. 60.000 руб/мес.

2015 г.  $\frac{60.000 \cdot 1,17}{1 + \frac{m}{100}}$  (ежегодно население увеличивается на  $m\%$ )

2016 г.  $\frac{60.000 \cdot 1,17^2}{\left(1 + \frac{m}{100}\right)^2}$

2017 г.  $\frac{60.000 \cdot 1,17^3}{\left(1 + \frac{m}{100}\right)^3}$

По условию среднемесячный доход на душу населения в регионах А и В стал одинаковым.

$$\frac{60.000 \cdot 1,17^3}{\left(1 + \frac{m}{100}\right)^3} = 43740 \cdot 1,25^3$$

$$\left(1 + \frac{m}{100}\right)^3 = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 1,17^3}{43740 \cdot 1,25^3}$$

$$\left(1 + \frac{m}{100}\right)^3 = \frac{10^3 \cdot 1,17^3}{93 \cdot 1,25^3}$$

$$1 + \frac{m}{100} = \frac{10 \cdot 1,17}{9 \cdot 1,25}$$

$$1 + \frac{m}{100} = \frac{2 \cdot 13}{25}$$

$$\frac{m}{100} = \frac{1}{25} \Rightarrow \boxed{m = 4}$$

Население ежегодно увеличивается на 4% в регионе В.

Ответ: 4

### Задание 17.3. Ответы.

1) 5 800 000 руб.

2) 90.

3) 10.

4) 12,5.

5) 12 млн руб.

6) 8 млн руб.

7)  $\frac{43}{441} < r < \frac{41}{400}$ .

8) 4.



### Задание 17.3 (ДЗ). Экономические задачи. Разное.

1) Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно  $t^2$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $2t$  единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно  $t^2$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $3t$  единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 400 рублей.

Григорий готов выделять 3 250 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

2) Вадим является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно  $t^2$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $t$  единиц товара.

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Вадим платит рабочему 500 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, — 300 рублей.

Вадиму нужно каждую неделю производить 80 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

#### 3) (ЕГЭ-2019)

Строительство нового завода стоит 220 млн рублей. Затраты на производство  $x$  тыс. единиц продукции на таком заводе равны  $0,5x^2 + x + 7$  млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене  $p$  тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит  $px - (0,5x^2 + x + 7)$ . Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. В первый год после постройки завода цена продукции равна 9 тыс. рублей за единицу, каждый следующий год цена продукции увеличивается на 1 тыс. рублей за единицу. За сколько лет окупится строительство завода?

#### 4) (ЕГЭ-2018)

Зависимость количества  $Q$  (в шт.,  $0 \leq Q \leq 15000$ ) купленного у фирмы товара от цены  $P$  (в руб. за шт.) выражается формулой  $Q = 15000 - P$ . Затраты на производство  $Q$  единиц товара составляют  $3000Q + 1000000$  рублей. Кроме затрат на производство, фирма должна заплатить налог  $t$  рублей ( $0 < t < 10000$ ) с каждой произведенной единицы товара. Таким образом, прибыль фирмы составляет  $PQ - 3000Q - 1000000 - tQ$  рублей, а общая сумма налогов, собранных государством, равна  $tQ$  рублей. Фирма производит такое количество товара, при котором её прибыль максимальна.

При каком значении  $t$  общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной?

#### 5) (ЕГЭ-2016)

Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет **целое** число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вклад ежегодно пополняется на 1 млн рублей. Найдите наименьший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет больше 10 млн рублей.

6) Вклад в размере 5 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на  $x$  млн рублей, где  $x$  — целое число. Найдите наименьшее значение  $x$ , при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 3 млн рублей.

#### 7) (ЕГЭ-2017)

Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят  $10t$  тысяч рублей в конце года  $t$  ( $t = 1; 2; \dots$ ). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться в  $(1 + r)$  раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях  $r$  это возможно?

8) В регионе  $A$  среднемесячный доход на душу населения в 2015 году составлял 26620 рублей и ежегодно увеличивался на 20%.

В регионе  $B$  среднемесячный доход на душу населения в 2015 году составлял 34560 рублей. В течение трёх лет суммарный доход жителей региона  $B$  увеличивался на 21% ежегодно, а население увеличивалось на  $m\%$  ежегодно.

В 2018 году среднемесячный доход на душу населения в регионах  $A$  и  $B$  стал одинаковым. Найдите  $m$ .

### Задание 17.3 (ДЗ). Ответы.

- 1) 325.
- 2) 1 200 000 руб.
- 3) 5.
- 4) 6 000 руб.
- 5) 6 млн руб.
- 6) 3 млн руб.
- 7)  $\frac{1}{11} < r < \frac{1}{10}$ .
- 8) 10.



