Людмила Ивановна Скрипка

ЗАДАНИЕ №18

МАТЕМАТИКА

ЕГЭ 2021

Рукописный вариант

СОДЕРЖАНИЕ

§1.Задание №18.1. Аналитические решения. 2
Решения....................................3
Задание №18.1. Ответы. 9
§2.Задание №18.2. Аналитические решения(часть2)....................................10
Решения....................................11
Задание №18.2. Ответы. 19
§3.Задание №18.3. Графические решения. Плоскость XOA (часть1). 20
Решения....................................20
Задание №18.3. Ответы. 26
Задание №18.3(ДЗ). Графические решения. Плоскость XOA (часть1)....................................27
Решения....................................28
Задание 18.3 (ДЗ). Ответы....................................33
§4.Задание 18.4. Графические решения. Плоскость XOA(часть2). 34
Решения....................................35
Задание №18.4. Ответы. 41
Задание №18.4 (ДЗ). Графические решения. Плоскость XOA(часть 2)....................................41
Решения....................................43
Задание №18.4(ДЗ). Ответы. 48
§5.Задание №18.5. Графические решения. Плоскость XOY (часть1). 49
Решения....................................60
Задание №18.5. Ответы. 58
Задание №18.5(ДЗ). Графичекие решения. Плоскость XOY (часть 1). 59
Решения....................................60
Задание №18.5(ДЗ).Ответы. 68
§6.Задание №18.6. Графические решения. Плоскость XOY (часть2). 69
Решения....................................70
Задание №18.6. Ответы. 76
§7. Задание №18.7. Параметр. Разное. 77
Решения....................................78
Задание №18.7. Ответы. 86

Задание №18.1. Аналитические решения.

1) (ЕГЭ-2019)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2 - a(a+1)x + a^3}{\sqrt{2 + x - x^2}} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

2) (ЕГЭ-2018)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет ровно четыре различных решения:

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 12a - 28, \\ x^2 + y^2 = a. \end{cases}$$

3) (ЕГЭ-2018)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет ровно четыре различных решения:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4(a+1)x - 2ay + 5a^2 + 8a + 3 = 0, \\ x^2 = y^2. \end{cases}$$

4) (ЕГЭ-2018)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет ровно четыре различных решения:

$$\begin{cases} y = (a-2)x^2 - 2ax - 2 + a, \\ x^2 = y^2. \end{cases}$$

5) (ЕГЭ-2018)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет ровно четыре различных решения:

$$\begin{cases} ax^2 + ay^2 - (2a-5)x + 2ay + 1 = 0, \\ x^2 + y = xy + x. \end{cases}$$

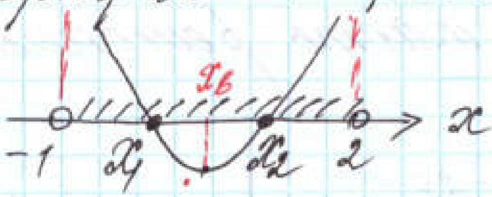
18.1. 1) ЕГЭ-2019.

a-? ровно 2 разл. корня

$$\frac{x^2-a(a+1)x+a^3}{\sqrt{2+x-x^2}}=0.$$

$$\begin{cases} x^2-a(a+1)x+a^3=0 \\ 2+x-x^2>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-a(a+1)x+a^3=0 & (1) \\ (x+1)(x-2)<0 & (2) \end{cases}$$

Функция $f(x)=x^2-a(a+1)x+a^3$ квадратичная, график парабола, ветви вверх.



$$x_в=\frac{a(a+1)}{2}$$

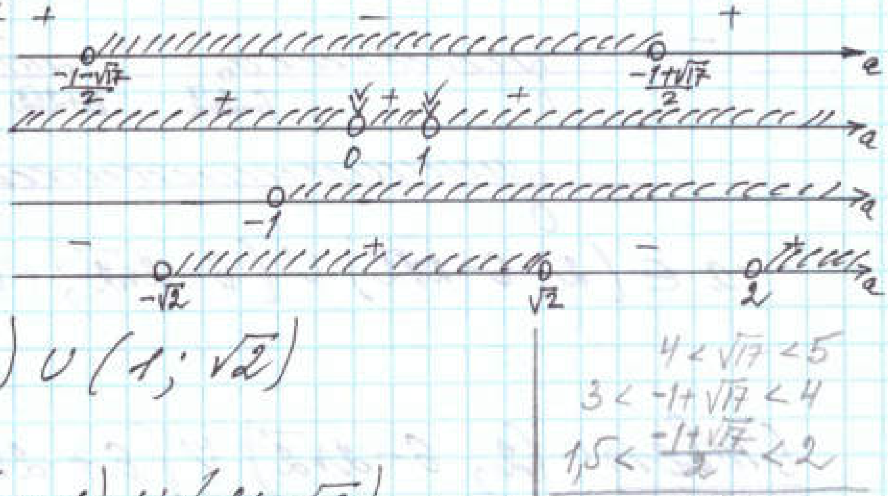
Нам надо, чтобы оба корня уравнения (1) удовлетворяли условию (2), значит

$$\begin{cases} -1<x_в<2 \\ f(x_в)<0 \\ f(-1)>0 \\ f(2)>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -1<\frac{a(a+1)}{2}<2 \\ \left(\frac{a(a+1)}{2}\right)^2-\frac{a(a+1)a(a+1)}{2}+a^3<0 \\ (-1)^2-a(a+1)\cdot(-1)+a^3>0 \\ 2^2-a(a+1)\cdot 2+a^3>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2<a^2+a<4 \\ a^2(a+1)^2-2a^2(a+1)^2+4a^3<0 \\ 1+a^2+a+a^3>0 \\ 4-2a^2-2a+a^3>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2+a-4<0 \\ a^2+a+2>0 \quad \forall a\in R \\ 4a^3-a^2(a+1)^2<0 \\ a^2(a+1)+(a+1)>0 \quad a^2+1>0 \ \forall a\in R \\ a^2(a-2)-2(a-2)>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+a-4<0 \\ a^2(a-1)^2>0 \\ a+1>0 \\ (a-2)(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})>0 \end{cases}$$

$\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$



$a\in(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;\sqrt{2})$

$4<\sqrt{17}<5$

$3<-1+\sqrt{17}<4$

$1{,}5<\frac{-1+\sqrt{17}}{2}<2$

$-3<\frac{-1+\sqrt{17}}{2}<-2{,}5$

Ответ: $(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;\sqrt{2})$.

$\boxed{18.1.}$ 2) ЕГЭ-2018

a - ? ровно 4 разл. решения

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 12a - 28 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = 12a - 28 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases} \qquad \begin{cases} (x^2 - y^2)\cdot a = 12a - 28 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

Заметим, что при $a < 0$ второе уравнение не будет иметь решений, а при $a = 0$ первое уравнение не будет иметь решений.

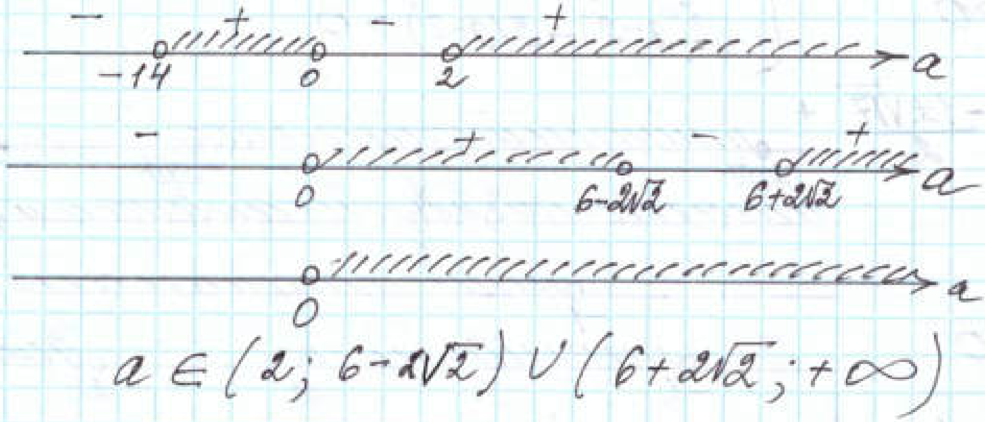
Значит $\boxed{a > 0.}$

$$\pm\begin{cases} x^2 - y^2 = \dfrac{12a - 28}{a} \\ x^2 + y^2 = a \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2 = \dfrac{12a - 28}{a} + a \\ 2y^2 = a - \dfrac{12a - 28}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 = \dfrac{a^2 + 12a - 28}{a} \\ 2y^2 = \dfrac{a^2 - 12a + 28}{a} \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = \dfrac{a^2 + 12a - 28}{2a} \\ y^2 = \dfrac{a^2 - 12a + 28}{2a} \end{cases}$$

Чтобы данное уравнение имело ровно 4 корня, потребуем, чтобы

$$\begin{cases} x^2 > 0 \\ y^2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{a^2 + 12a - 28}{a} > 0 \\ \dfrac{a^2 - 12a + 28}{a} > 0 \end{cases}$$



$a \in (2; 6 - 2\sqrt{2}) \cup (6 + 2\sqrt{2}; +\infty)$

<u>Ответ:</u> $(2; 6 - 2\sqrt{2}) \cup (6 + 2\sqrt{2}; +\infty)$

$a^2 + 12a - 28$

$a = -6 \pm \sqrt{36 + 28}$

$a = -6 \pm 8$

$\left[\begin{array}{l} a = -14 \\ a = 2 \end{array}\right.$

$a^2 - 12a + 28$

$a = 6 \pm \sqrt{36 - 28}$

$a = 6 \pm 2\sqrt{2}$

$8 < 6 + 2\sqrt{2} < 9$

$3 < 6 - 2\sqrt{2} < 4$

18.1. 3) ЕГЭ - 2018

a - ? ровно 4 различных решения:

$$\begin{cases} x^2+y^2-4(a+1)x-2ay+5a^2+8a+3=0 \\ x^2=y^2. \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем $y=\pm x$.

I) Если $y=x$, то

$$x^2+x^2-4(a+1)x-2ax+5a^2+8a+3=0$$

$$2x^2-(6a+4)x+5a^2+8a+3=0.$$

В этой серии корней должно быть 2 разл. реш.:

$$\begin{cases} \frac{D}{4}>0 \\ x\neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (3a+2)^2-2(5a^2+8a+3)>0 \\ 5a^2+8a+3\neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9a^2+12a+4-10a^2-16a-6>0 \\ 5(a+1)(a+\frac{3}{5})\neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+4a+2<0 \\ a\neq -1 \\ a\neq -0{,}6 \end{cases}$$

$-2\pm\sqrt{2}$

$-1<-2+\sqrt{2}<0$

$-4<-2-\sqrt{2}<-3$

$-2+\sqrt{2} \vee -0{,}6$

$\sqrt{2} \vee 1{,}4$

$2 \vee 1{,}96$

$-2+\sqrt{2}>-0{,}6$

$-2-\sqrt{2}$; -1 ; $-0{,}6$; $-2+\sqrt{2}$; a

При $a\in(-2-\sqrt{2};-1)\cup(-1;-0{,}6)\cup(-0{,}6;-2+\sqrt{2})$ данная система будет иметь 2 разл. решения вида: $(x_1;x_1)$ $(x_2;x_2)$, где $x_1\neq x_2$.

II) Если $y=-x$, то

$$x^2+x^2-4(a+1)x+2ax+5a^2+8a+3=0$$

$$2x^2-(2a+4)x+5a^2+8a+3=0.$$

Аналогично: $\begin{cases} (a+2)^2-2(5a^2+8a+3)>0 \\ 5a^2+8a+3\neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a^2+4a+4-10a^2-16a-6>0 \\ a\neq -1 \\ a\neq -0{,}6 \end{cases}$

$$\begin{cases} 9a^2+12a+2<0 \\ a\neq -1 \\ a\neq -0{,}6 \end{cases}$$

$a=\frac{-6\pm\sqrt{36-18}}{9}=\frac{-6\pm 3\sqrt{2}}{9}=\frac{-2\pm\sqrt{2}}{3}.$

$-\frac{1}{3}<\frac{-2+\sqrt{2}}{3}<0$; $-\frac{4}{3}<\frac{-2-\sqrt{2}}{3}<-1$

Сравним: $\frac{-2+\sqrt{2}}{3} \vee -0{,}6$;

$-2+\sqrt{2} \vee -1{,}8$

$\sqrt{2} \vee 0{,}2$

$2 \vee 0{,}04 \Rightarrow \frac{-2+\sqrt{2}}{3}>-0{,}6.$

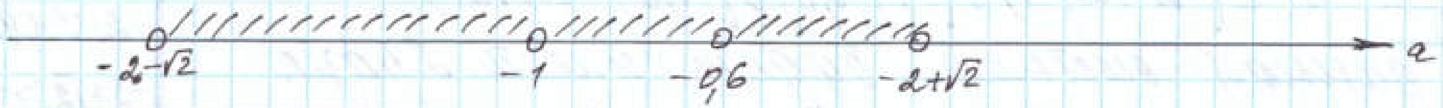
При $a \in \left(\frac{-2-\sqrt2}{3}; -1\right) \cup (-1; -0{,}6) \cup \left(-0{,}6; \frac{-2+\sqrt2}{3}\right)$
данная система будет иметь 2 разл. реш. вида $(x_3; -x_3)$; $(x_4; -x_4)$.

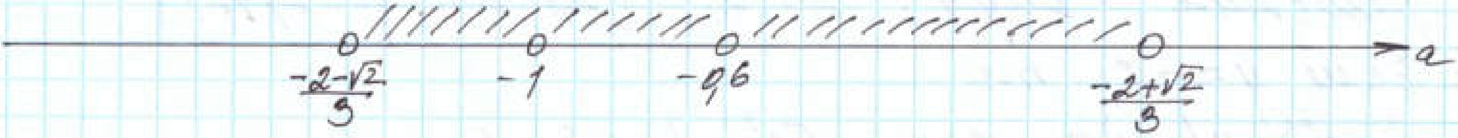
Теперь надо найти пересечение полученных значений a, чтобы система имела ровно 4 различных решения:

Сравним: $\frac{-2+\sqrt2}{3} \vee -2+\sqrt2$

$$-2+\sqrt2 \vee -6+3\sqrt2$$
$$4 \vee 2\sqrt2$$
$$2 \vee \sqrt2$$
$$4 \vee 2$$
$$\frac{-2+\sqrt2}{3} > -2+\sqrt2$$

$$-2-\sqrt2 < \frac{-2-\sqrt2}{3} < -1 < -0{,}6 < -2+\sqrt2 < \frac{-2+\sqrt2}{3}$$





$a \in \left(\frac{-2-\sqrt2}{3}; -1\right) \cup (-1; -0{,}6) \cup (-0{,}6; -2+\sqrt2)$.

<u>Ответ:</u> $\left(\frac{-2-\sqrt2}{3}; -1\right) \cup (-1; -0{,}6) \cup (-0{,}6; -2+\sqrt2)$

18.1. 4) ЕГЭ-2018

a - ? ровно 4 различных решения

$$\begin{cases} y=(a-2)x^2-2ax-2+a \\ x^2=y^2 \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем $y=\pm x$.

I) Если $y=x$, то

$x=(a-2)x^2-2ax-2+a$

$(a-2)x^2-(2a+1)x+(a-2)=0.$

Это уравнение должно обязательно иметь 2 различных решения (чтобы всего их было 4), значит $\begin{cases} D>0 \\ a-2\neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (2a+1)^2-4(a-2)^2>0 \\ a\neq 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 4a^2+4a+1-4a^2+16a-16>0 \\ a\neq 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 20a-15>0 \\ a\neq 2 \end{cases}$ $\begin{cases} a>0{,}75 \\ a\neq 2 \end{cases}$

При $a\in(0{,}75;2)\cup(2;+\infty)$ данная система будет иметь решения вида: $(x_1;x_1)$; $(x_2;x_2)$; $x_1\neq x_2$.

II) Если $y=-x$, то

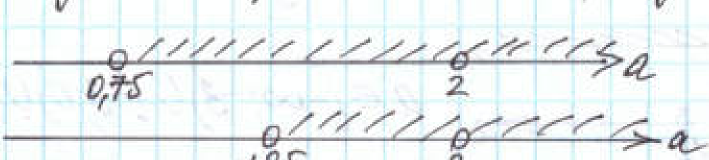
$-x=(a-2)x^2-2ax-2+a$

$(a-2)^2x^2-(2a-1)x+a-2=0$ $\begin{cases} D>0 \\ a-2\neq 0 \end{cases}$ аналогично.

$\begin{cases} (2a-1)^2-4(a-2)^2>0 \\ a\neq 2 \end{cases}$; $\begin{cases} 4a^2-4a+1-4a^2+16a-16>0 \\ a\neq 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 12a-15>0 \\ a\neq 2 \end{cases}$ $\begin{cases} a>1{,}25 \\ a\neq 2 \end{cases}$ Решения вида $(x_3;-x_3)$; $(x_4;-x_4)$, $x_3\neq x_4$.

Найдём пересечение полученных значений для a:



$a\in(1{,}25;2)\cup(2;+\infty)$

Ответ: $(1{,}25;2)\cup(2;+\infty)$.

18.1. б) ЕГЭ – 2018

a – ? ровно 4 различных решения

$$\begin{cases} ax^2 + ay^2 - (2a-5)x + 2ay + 1 = 0. \\ x^2 + y = xy + x \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение системы

$x^2 + y - xy - x = 0$; $x(x-1) - y(x-1) = 0$; $(x-1)(x-y) = 0$.

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = y \end{array}\right.$$

I. Если $x = 1$, то $a + ay^2 - 2a + 5 + 2ay + 1 = 0$

$ay^2 + 2ay + 6 - a = 0$.

Это уравнение должно иметь два различных корня, значит $\begin{cases} a \neq 0 \\ D > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a \neq 0 \\ a^2 - a(6-a) > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a \neq 0 \\ 2a^2 - 6a > 0 \end{cases}$

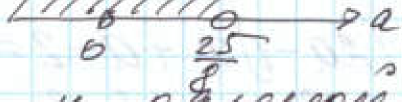
$\begin{cases} a \neq 0 \\ a(a-3) > 0 \end{cases}$ $a(a-3) > 0$ 

При $a \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$ у данной системы будут 2 различных решения вида $(1; y_1)(1; y_2)$, $y_1 \neq y_2$

II. Если $x = y$, то $ay^2 + ay^2 - (2a-5)y + 2ay + 1 = 0$

$2y^2a - 2ay + 5y + 2ay + 1 = 0$

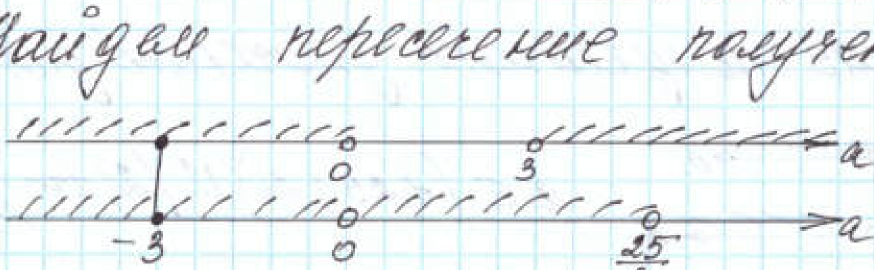
$2ay^2 + 5y + 1 = 0$., аналогично требуем $\begin{cases} a \neq 0 \\ D > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a \neq 0 \\ 25 - 8a > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a \neq 0 \\ a < \frac{25}{8} \end{cases}$ 

При $a \in (-\infty; 0) \cup (0; \frac{25}{8})$ у данной системы будут два различных решения вида $(y_3; y_3)(y_4; y_4)$ $y_3 \neq y_4$

Проверим совпадение решений; это возможно только в точке $(1; 1)$. Если $y = 1$, то $2a + 5 + 1 = 0$, $\underline{a = -3}$

Найдем пересечение полученных значений a.



$a \in (-\infty; -3) \cup (-3; 0) \cup (3; \frac{25}{8})$

__Ответ:__ $(-\infty; -3) \cup (-3; 0) \cup (3; \frac{25}{8})$

Задание №18.1. Ответы.

1) $(-1;\ 0);\ (0;\ 1);\ (1;\ \sqrt{2}).$

2) $(2;\ 6-2\sqrt{2});\ (6+2\sqrt{2};\ +\infty).$

3) $\left(\dfrac{-2-\sqrt{2}}{3};\ -1\right);\ (-1;\ -0,6);\ (-0,6;\ -2+\sqrt{2}).$

4) $(1,25;\ 2);\ (2;\ +\infty).$

5) $(-\infty;\ -3);\ (-3;\ 0);\ \left(3;\ \dfrac{25}{8}\right).$

Задание №18.2. Аналитические решения (часть 2).

1) (ЕГЭ-2018)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x+2a-1}+\sqrt{x-a}=1$$

имеет хотя бы один корень.

2) (ЕГЭ-2016)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{15x^2+6ax+9}=x^2+ax+3$$

имеет ровно три различных решения.

3) (ЕГЭ-2016)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x-2a}{x+2}+\frac{x-1}{x-a}=1$$

имеет единственное решение.

4) (ЕГЭ-2014)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4+(a-5)^4}=|x+a-5|+|x-a+5|$$

имеет единственное решение.

5) (ЕГЭ-2014)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(\log_8(x+a)-\log_8(x-a))^2-12a(\log_8(x+a)-\log_8(x-a))+35a^2-6a-9=0$$

имеет ровно два различных решения.

18.2. 1) ЕГЭ – 2018

a – ? хотя бы один корень

$$\sqrt{x+2a-1}+\sqrt{x-a}=1.$$

$$\sqrt{x+2a-1}=1-\sqrt{x-a}$$

$$\begin{cases} 1-\sqrt{x-a}\geqslant 0 \\ x-a\geqslant 0 \\ x+2a-1=\left(1-\sqrt{x-a}\right)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{x-a}\leq 1 \\ x-a\geqslant 0 \\ x+2a-1=1-2\sqrt{x-a}+x-a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0\leq x-a\leq 1 \\ 2\sqrt{x-a}=2-3a \end{cases} \qquad \begin{cases} a\leq x\leq a+1 \\ 2-3a\geqslant 0 \\ 4(x-a)=(2-3a)^2 \end{cases}$$

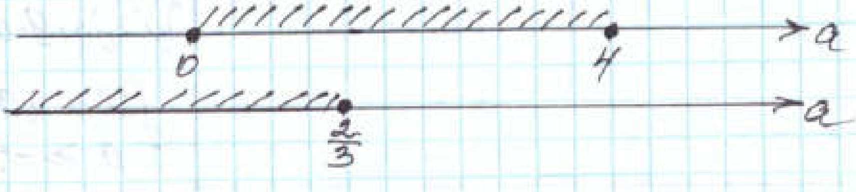
$$\begin{cases} a\leq x\leq a+1 \\ a\leq \frac{2}{3} \\ 4x-4a=4-12a+9a^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a\leq x\leq a+1 \\ a\leq \frac{2}{3} \\ x=\frac{9}{4}a^2-2a+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{9}{4}a^2-2a+1 \\ \frac{9}{4}a^2-2a+1\geqslant a \\ \frac{9}{4}a^2-2a+1\leq a+1 \\ a\leq \frac{2}{3} \end{cases}$$

Чтобы существовал хотя бы один корень, надо, чтобы выполнялись все ограничения на a.

$$\begin{cases} 9a^2-12a+4\geqslant 0 \\ 9a^2-12a\leq 0 \\ a\leq \frac{2}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} (3a-2)^2\geqslant 0 \quad \forall a\in\mathbb{R} \\ 3a(a-4)\leq 0 \\ a\leq \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(a-4)\leq 0 \\ a\leq \frac{2}{3} \end{cases}$$



$$a\in\left[0;\frac{2}{3}\right]$$

Ответ: $\left[0;\frac{2}{3}\right]$

$\boxed{18.2.}$ 2) ЕГЭ - 2016

$a - ?$ ровно 3 различных решения

$$\sqrt{15x^2+6ax+9} = x^2+ax+3.$$

$$\begin{cases} x^2+ax+3 \geqslant 0 \\ 15x^2+6ax+9 = x^4+a^2x^2+9+2ax^3+6ax+6x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+ax+3 \geqslant 0 \\ x^4+2ax^3-9x^2+a^2x^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+ax+3 \geqslant 0 \\ x^2(x^2+2ax-9+a^2)=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+ax+3 \geqslant 0 \\ x^2=0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2+ax+3 \geqslant 0 \\ x^2+2ax-9+a^2=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ 0^2+0\cdot a+3 \geqslant 0 \quad \forall a \in R \end{cases}$$

Корень $x=0$ существует при любом значении a.

$$x^2+ax+3 \geqslant 0$$
$$x^2+2ax+(a-3)(a+3)=0.$$

$$\begin{cases} x^2+ax+3 \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=-(a+3) \\ x=-(a-3) \end{array}\right. \end{cases}$$

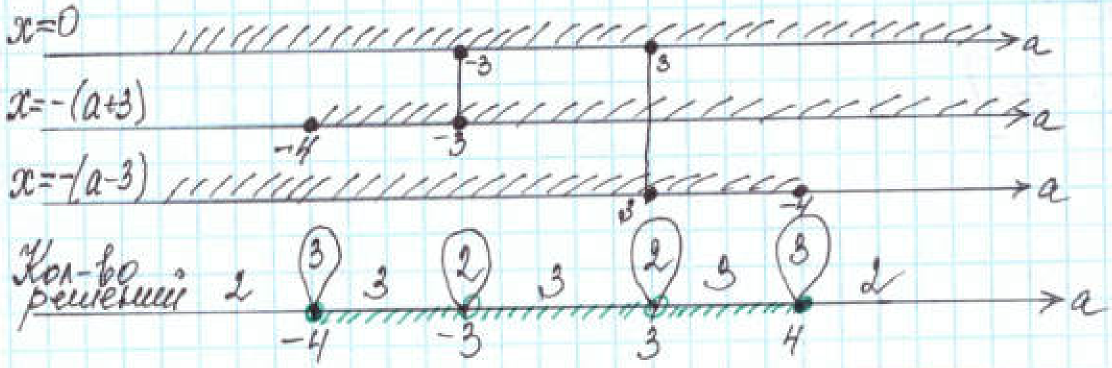
Проверим совпадение корней

$-(a+3)=0$	$-(a-3)=0$	$-(a+3)=-(a-3)$
$a+3=0$	$a-3=0$	$a+3=a-3$
$a=-3$	$a=3$	нет реш.

$$\begin{cases} x=-(a+3) \\ (-(a+3))^2-a(a+3)+3 \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=-(a-3) \\ (-(a-3))^2-a(a-3)+3 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-(a+3) \\ a^2+6a+9-a^2-3a+3 \geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-(a-3) \\ a^2-6a+9-a^2+3a+3 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-(a+3) \\ a \geqslant -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-(a-3) \\ a \leqslant 4 \end{cases}$$



Ответ: $[-4;-3)\cup(-3;3)\cup(3;4]$

18.2. 3) ЕГЭ-2016

a - ? единственное решение

$$\frac{x-2a}{x+2}+\frac{x-1}{x-a}=1$$

$$\frac{(x-2a)(x-a)+(x+2)(x-1)-(x+2)(x-a)}{(x+2)(x-a)}=0$$

$$\frac{x^2-2ax-ax+2a^2+x^2+x-2-x^2-2x+ax+2a}{(x+2)(x-a)}=0$$

$$\begin{cases} x^2-2ax-x+2a^2+2a-2=0 \\ (x+2)(x-a)\neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-(2a+1)x+(2a^2+2a-2)=0 \quad (1) \\ x\neq -2 \\ x\neq a \end{cases}$$

(1) $x^2-(2a+1)x+(2a^2+2a-2)=0$

$$x=\frac{2a+1\pm\sqrt{(2a+1)^2-4(2a^2+2a-2)}}{2}$$

$$x=\frac{2a+1\pm\sqrt{4a^2+4a+1-8a^2-8a+8}}{2}$$

$$x=\frac{2a+1\pm\sqrt{9-4a-4a^2}}{2}$$

Пусть $x_1=\frac{2a+1+\sqrt{9-4a-4a^2}}{2}$

$x_2=\frac{2a+1-\sqrt{9-4a-4a^2}}{2}$

$x_0=\frac{2a+1}{2}$

Возможны случаи:

$$\begin{cases} D=0 \\ x_0\neq -2 \\ x_0\neq a \end{cases} \text{ или } \begin{cases} D>0 \\ \left[\begin{array}{l} x_1=-2 \\ x_1=a \end{array}\right. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} D>0 \\ \left[\begin{array}{l} x_2=-2 \\ x_2=a \end{array}\right. \end{cases}$$

I $$\begin{cases} 9-4a-4a^2=0 \\ \frac{2a+1}{2}\neq -2 \\ \frac{2a+1}{2}\neq a \end{cases} \quad \begin{cases} 4a^2+4a-9=0 \\ 2a+1\neq -4 \\ 2a+1\neq 2a \end{cases} \quad \begin{cases} a=\frac{-1\pm\sqrt{10}}{2} \\ a\neq -2{,}5 \\ 1\neq 0 \text{ верно} \end{cases} \quad a=\frac{-1\pm\sqrt{10}}{2}$$

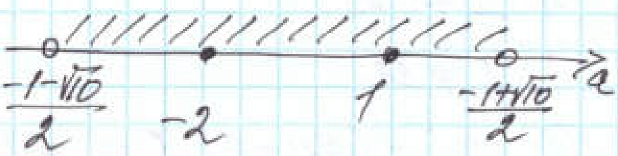
II. $$\begin{cases} 9-4a-4a^2>0 \\ \left[\begin{array}{l} \frac{2a+1+\sqrt{9-4a-4a^2}}{2}=-2 \\ \frac{2a+1+\sqrt{9-4a-4a^2}}{2}=a \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} 4a^2+4a-9<0 \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{9-4a-4a^2}=-5-2a \\ \sqrt{9-4a-4a^2}=-1 \end{array}\right. \end{cases}$$

нет решения

III $\begin{cases} 9-4a-4a^2>0 \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{2a+1-\sqrt{9-4a-4a^2}}{2}=-2 \\ \dfrac{2a+1-\sqrt{9-4a-4a^2}}{2}=a \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} 4a^2+4a-9<0 \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{9-4a-4a^2}=2a+5 \\ \sqrt{9-4a-4a^2}=1 \end{array}\right. \end{cases}$

$\begin{cases} 4a^2+4a-9<0 \\ 2a+5\geqslant 0 \\ 9-4a-4a^2=4a^2+20a+25 \end{cases}$ или $\begin{cases} 4a^2+4a-9<0 \\ 9-4a-4a^2=1 \end{cases}$

$\begin{cases} 4a^2+4a-9<0 \\ a\geqslant -2{,}5 \\ a^2+3a+2=0 \end{cases} \Bigg| \begin{array}{l} \frac{-1\pm\sqrt{10}}{2} \\ -2{,}5 \\ -2; -1 \end{array}$ $\begin{cases} 4a^2+4a-9<0 \\ a^2+a-2=0 \end{cases} \Bigg| 1; -2$



$\left[\begin{array}{l} a=-2 \\ a=-1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a=-2 \\ a=1 \end{array}\right.$

Объединим полученные решения

$$\left[\begin{array}{l} a=\dfrac{-1\pm\sqrt{10}}{2} \\ a=-2 \\ a=\pm 1 \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{-1-\sqrt{10}}{2}$; -2; -1; 1; $\frac{-1+\sqrt{10}}{2}$

18.2. 4) ЕГЭ-2014

a – ? единственное решение

$$\sqrt{x^4+(a-5)^4}=|x+a-5|+|x-a+5|$$

Заметим, что уравнение является симметричным относительно x, т.к.

$$\sqrt{x^4+(a-5)^4}=\sqrt{(-x)^4+(a-5)^4} \quad \text{и}$$

$$|x+a-5|+|x-a+5|=|-x+a-5|+|-x-a+5|=$$

$$=|x-a+5|+|x+a-5|.$$ (использовали: $|m|=|-m|$)

Поэтому единственное (или нечётное) решение возможно только при $x=0$.

$$\sqrt{0^4+(a-5)^4}=|0+a-5|+|0-a+5|$$

$$\sqrt{(a-5)^4}=|a-5|+|5-a|$$

$$(a-5)^2-2|a-5|=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\geq 5\\(a-5)^2-2(a-5)=0\end{cases}\\ \\ \begin{cases}a<5\\(a-5)^2+2(a-5)=0\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\geq 5\\(a-5)(a-7)=0\end{cases}\\ \\ \begin{cases}a<5\\(a-5)(a-3)=0\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\geq 5\\ \left[\begin{array}{l}a=5\\a=7\end{array}\right.\end{cases}\\ \\ \begin{cases}a<5\\a=3\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}a=5\\a=7\\ \\a=3\end{array}\right.$$

Проверка

I При $a=3$ получим $\sqrt{x^4+2^4}=|x-2|+|x+2|$

	$x<-2$	$-2\le x\le 2$	$x>2$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$

1) $x<-2 \Rightarrow \sqrt{x^4+16}=-x+2-x-2$

$\sqrt{x^4+16}=-2x$

$x^4+16=4x^2$

$x^4-4x^2+16=0$ нет корней, т.к. $D<0$.

2) $-2\leq x\leq 2 \Rightarrow \sqrt{x^4+16}=-x+2+x+2$

$\sqrt{x^4+16}=4$

$x^4+16=16$

$x^4=0$

$x=0$ единственный корень

3) $x > 2 \Rightarrow \sqrt{x^4+16} = x-2+x+2$

$\sqrt{x^4+16} = 2x$

$x^4+16 = 4x^2$

$x^4-4x^2+16=0$ нет корней, т.к. $D<0$.

Получим, что при $a=3$ единственный корень $x=0$.

II. При $a=5$ получим $\sqrt{x^4} = |x|+|x|$

$x^2 = 2|x|$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 2x \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x^2 = -2x \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ x(x-2) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x(x+2) = 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Получим, что при $a=5$ три корня $-2; 0; 2$.

III При $a=7$ получим $\sqrt{x^4+2^4} = |x+2|+|x-2|$

Это уравнение мы уже решали в I,

оно имеет единственный корень $x=0$.

<u>Ответ</u>: 3; 7

18.2 5) ЕГЭ - 2014

a - ? ровно два различных решения

$$(\log_8(x+a)-\log_8(x-a))^2-12a(\log_8(x+a)-\log_8(x-a))+$$
$$+35a^2-6a-9=0.$$

Пусть $\log_8(x+a)-\log_8(x-a)=t$, тогда

$$t^2-12at+35a^2-6a-9=0$$

$$t=6a\pm\sqrt{36a^2-35a^2+6a+9}=6a\pm\sqrt{(a+3)^2}=6a\pm(a+3)$$

$$\left[\begin{array}{l} t=7a+3 \\ t=5a-3. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \log_8(x+a)-\log_8(x-a)=7a+3 \\ \log_8(x+a)-\log_8(x-a)=5a-3 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x+a>0 \\ x-a>0 \\ \left[\begin{array}{l} \log_8\frac{x+a}{x-a}=\log_8 8^{7a+3} \\ \log_8\frac{x+a}{x-a}=\log_8 8^{5a-3} \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x>-a \\ x>a \\ \left[\begin{array}{l} \frac{x+a}{x-a}=8^{7a+3} \\ \frac{x+a}{x-a}=8^{5a-3} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>-a \\ x>a \\ \left[\begin{array}{l} x+a=x\cdot 8^{7a+3}-a\cdot 8^{7a+3} \\ x+a=x\cdot 8^{5a-3}-a\cdot 8^{5a-3} \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x>-a \\ x>a \\ \left[\begin{array}{l} x\cdot(8^{7a+3}-1)=a(8^{7a+3}+1) \\ x\cdot(8^{5a-3}-1)=a(8^{5a-3}+1) \end{array}\right. \end{cases}$$

(1) $x(8^{7a+3}-1)=a(8^{7a+3}+1)$

Если $7a+3=0$, т.е. $a=-\frac{3}{7}$, то $x\cdot 0=\frac{-3}{7}\cdot 2$ нет реш.

Если $a\neq-\frac{3}{7}$, то $x_1=\frac{a\cdot(8^{7a+3}+1)}{8^{7a+3}-1}$.

Проверим, при каких a будут выполняться условия $x_1>-a$ и $x_1>a$.

$$\begin{cases} \frac{a\cdot 8^{7a+3}+a}{8^{7a+3}-1}>-a \\ \frac{a\cdot 8^{7a+3}+a}{8^{7a+3}-1}>a \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{a\cdot 8^{7a+3}+a+a\cdot 8^{7a+3}-a}{8^{7a+3}-1}>0 \\ \frac{a\cdot 8^{7a+3}+a-a\cdot 8^{7a+3}+a}{8^{7a+3}-1}>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2\cdot a\cdot 8^{7a+3}}{8^{7a+3}-1}>0 \\ \frac{2a}{8^{7a+3}-1}>0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{a}{7a+3-0}>0 \\ \frac{a}{7a+3-0}>0 \end{cases} \quad \frac{a}{a+\frac{3}{7}}>0$$

$+$ $-\frac{3}{7}$ $-$ 0 $+$ a

(2) $x\cdot(8^{5a-3}-1)=a(8^{5a-3}+1)$

Если $5a-3=0$, т.е. $a=\frac{3}{5}$, то $x\cdot 0=\frac{3}{5}\cdot 2$ нет решений

Если $a\neq\frac{3}{5}$, то $x_2=\dfrac{a\cdot(8^{5a-3}+1)}{8^{5a-3}-1}$

Проверим, при каких a будут выполняться условия $x_2>a$ и $x_2>-a$.

$$\begin{cases}\dfrac{a(8^{5a-3}+1)}{8^{5a-3}-1}>a\\ \dfrac{a(8^{5a-3}+1)}{8^{5a-3}-1}>-a\end{cases}$$

При $a=0$ система не имеет решений.

При $a>0$ $\dfrac{8^{5a-3}+1}{8^{5a-3}-1}>1$; $\dfrac{2}{8^{5a-3}-1}>0$, $8^{5a-3}>1$, $\boxed{a>\frac{3}{5}}$

При $a<0$ $\dfrac{8^{5a-3}+1}{8^{5a-3}-1}<-1$; $\dfrac{2\cdot 8^{5a-3}}{8^{5a-3}-1}<0$, $8^{5a-3}<1$, $a<\frac{3}{5}$, $\boxed{a<0}$

Проверим, при каких a корни совпадут: $x_1=x_2$.

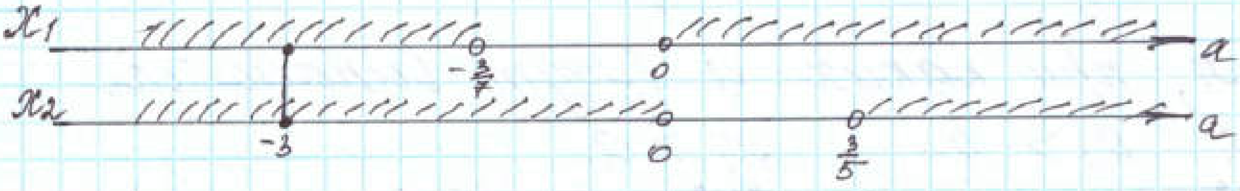
$$\frac{a(8^{5a-3}+1)}{8^{5a-3}-1}=\frac{a(8^{7a+3}+1)}{8^{7a+3}-1}$$

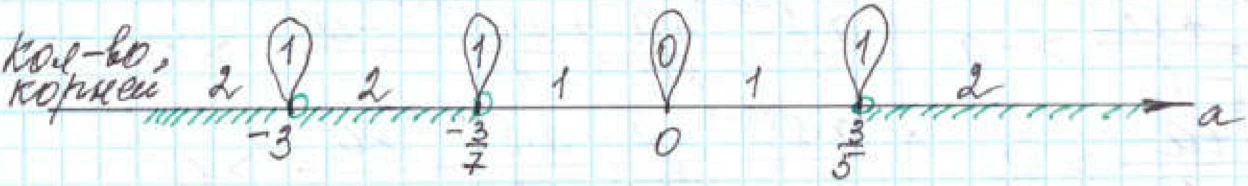
$$8^{5a-3}\cdot 8^{7a+3}+8^{7a+3}-8^{5a-3}-1=8^{5a-3}\cdot 8^{7a+3}-8^{7a+3}+8^{5a-3}-1$$

$$2\cdot 8^{7a+3}=2\cdot 8^{5a-3}$$

$$7a+3=5a-3$$

$$\boxed{a=-3}$$





Ровно 2 различных решения будет при $a\in(-\infty;-3)\cup(-3;-\frac{3}{7})\cup(\frac{3}{5};+\infty)$

<u>Ответ</u>: $(-\infty;-3)\cup(-3;-\frac{3}{7})\cup(\frac{3}{5};+\infty)$

Задание №18.2. Ответы.

1) $\left[0;\ \dfrac{2}{3}\right]$.

2) $[-4;\ -3);\ (-3;\ 3);\ (3;\ 4]$.

3) $\dfrac{-1-\sqrt{10}}{2};\ -2;\ -1;\ 1;\ \dfrac{-1+\sqrt{10}}{2}$.

4) $3;\ 7$.

5) $(-\infty;\ -3);\ \left(-3;\ -\dfrac{3}{7}\right);\ \left(\dfrac{3}{5};\ +\infty\right)$.

Задание №18.3. Графические решения. Плоскость XOA (часть 1).

1) (ЕГЭ-2019)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{|3x| - 2x - 2 - a}{x^2 - 2x - a} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

2) (ЕГЭ-2017)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x \cdot \sqrt{x - a} = \sqrt{4x^2 - (4a + 2)x + 2a}$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

3) (ЕГЭ-2017)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{(x - a - 7)(x + a - 2)}{\sqrt{10x - x^2 - a^2}} = 0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[4; 8]$.

4) (ЕГЭ-2017)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x - a} \cdot \sin x = -\sqrt{x - a} \cdot \cos x$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; \pi]$.

5) (ЕГЭ-2017)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2x - 1} \cdot \ln(4x - a) = \sqrt{2x - 1} \cdot \ln(5x + a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

18.3. 1) ЕГЭ – 2019

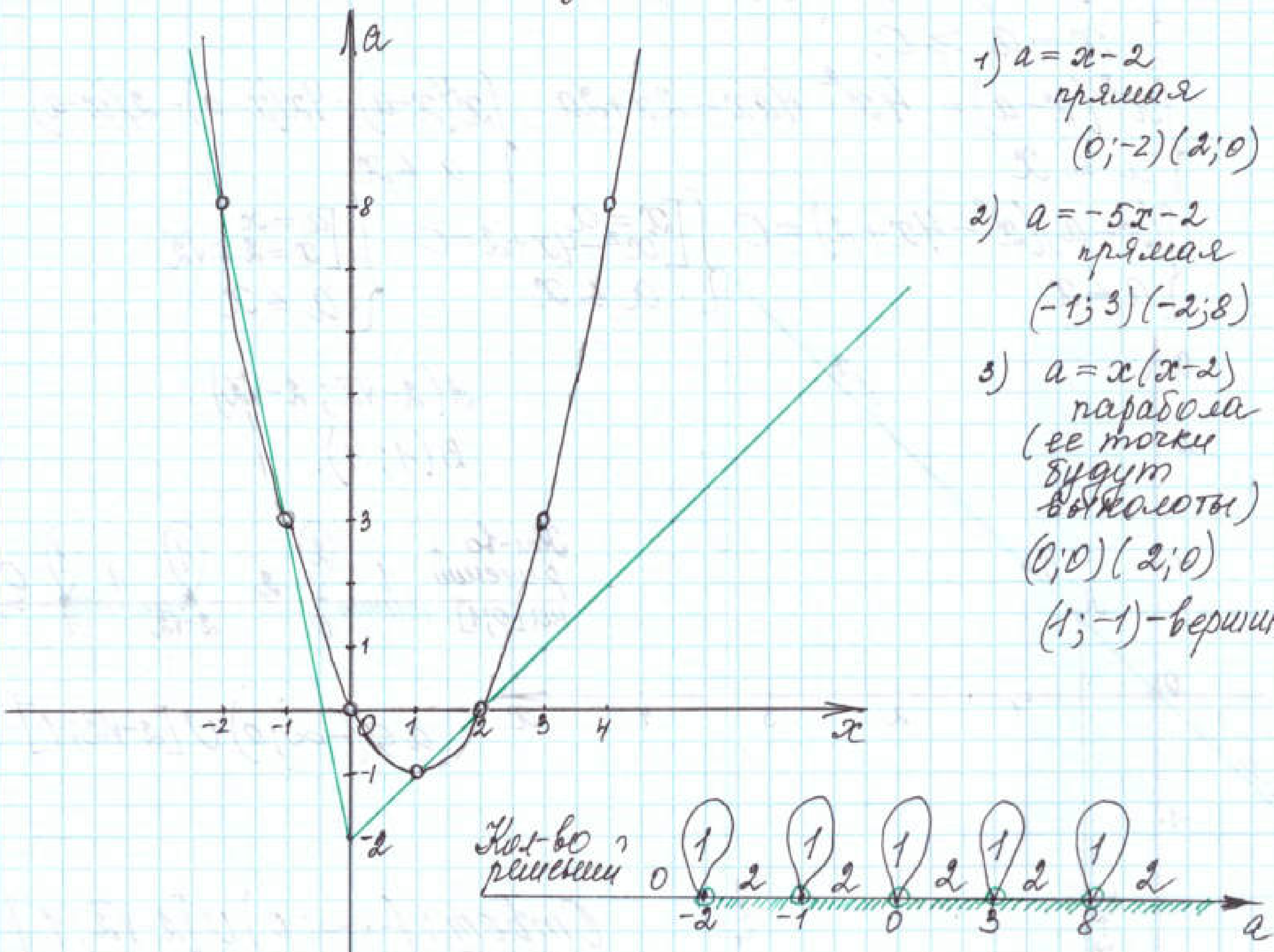
a – ? ровно 2 различных решения

$$\frac{3|x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$$

$$\begin{cases} 3|x|-2x-2-a=0 \\ x^2-2x-a\neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=3|x|-2x-2 \\ a\neq x(x-2). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ a=x-2 \\ a\neq x(x-2) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x<0 \\ a=-5x-2 \\ a\neq x(x-2) \end{cases}$$

Построим множество точек плоскости, удовлетворяющее этой совокупности, в системе координат xOa.



1) $a=x-2$ прямая $(0;-2)\ (2;0)$

2) $a=-5x-2$ прямая $(-1;3)\ (-2;8)$

3) $a=x(x-2)$ парабола (ее точки будут выколоты) $(0;0)\ (2;0)$ $(1;-1)$ – вершина

Ответ: $(-2;-1)\cup(-1;0)\cup(0;3)\cup(3;8)\cup(8;+\infty)$.

18.3. 2) ЕГЭ - 2017

a - ? ровно один корень на $[0;1]$

$$x\cdot\sqrt{x-a}=\sqrt{4x^2-(4a+2)x+2a}$$

При $x<0$ уравнение не имеет решений.

При $x=0$ $\quad 0\sqrt{-a}=\sqrt{2a} \Rightarrow a=0.$

Проверим, сколько корней будет при $a=0$:

$x\cdot\sqrt{x}=\sqrt{4x^2-2x}$; $\quad x^3=4x^2-2x$; $\quad x(x^2-4x+2)=0$

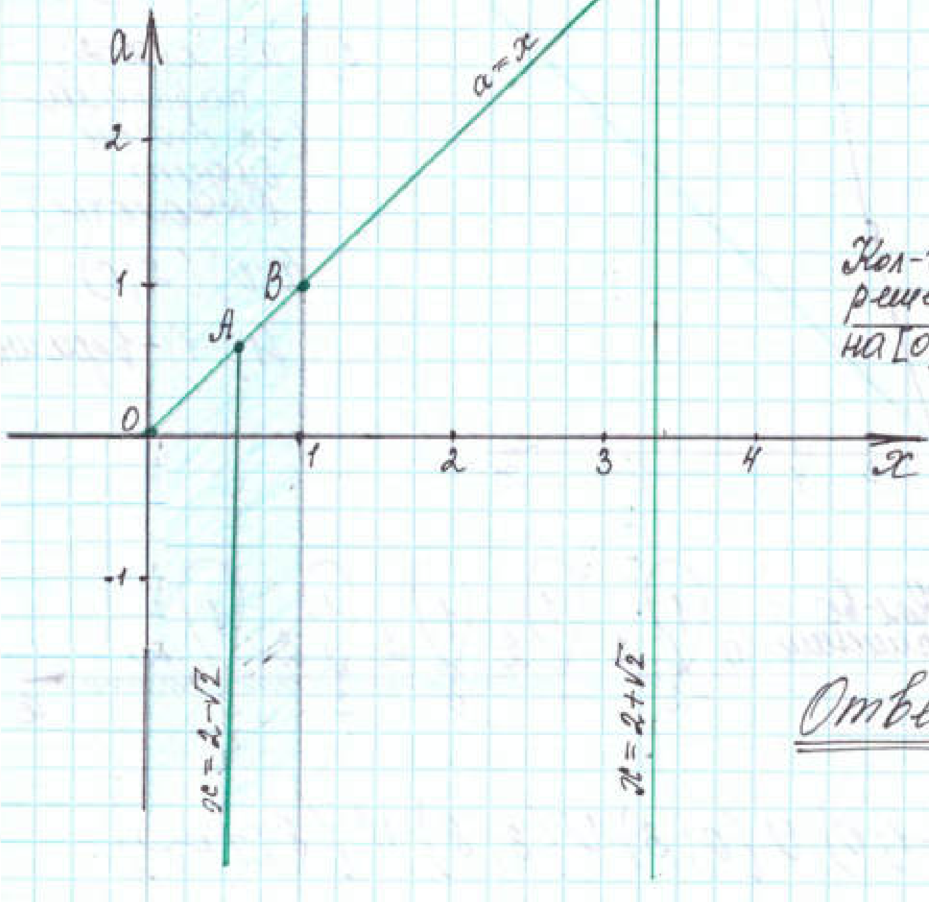
$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$ $\quad \begin{array}{l} 0\in[0;1] \\ 2-\sqrt{2}\in[0;1] \\ 2+\sqrt{2}\notin[0;1] \end{array}$ | Получили 2 корня на $[0;1]$, значит $\underline{a=0 \text{ не подходит}}$.

При $x>0$ возведем обе части ур-я в квадрат

$$\begin{cases} x^2(x-a)=4x^2-(4a+2)x+2a \\ x-a\geq 0. \end{cases}$$

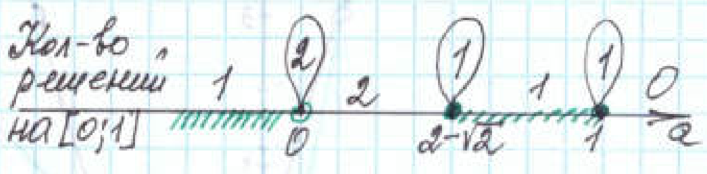
$$\begin{cases} x^2(x-a)=4x^2-4ax-2x+2a \\ a\leq x \end{cases} \quad \begin{cases} x^2(x-a)=4x(x-a)-2(x-a) \\ a\leq x \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-a)(x^2-4x+2)=0 \\ a\leq x \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=a \\ x^2-4x+2=0 \end{array}\right. \\ a\leq x \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=x \\ x=2\pm\sqrt{2} \end{array}\right. \\ a\leq x \end{cases}$$



$A(2-\sqrt{2};\,2-\sqrt{2})$

$B(1;\,1)$.



$a\in(-\infty;0)\cup[2-\sqrt{2};1]$

$\underline{\text{Ответ}}$: $(-\infty;0)\cup[2-\sqrt{2};1]$

$\boxed{18.3.}$ 3) ЕГЭ – 2017

a – ? ровно 1 корень на $[4;8]$

$$\frac{(x-a-7)(x+a-2)}{\sqrt{10x-x^2-a^2}}=0$$

$$\begin{cases}(x-a-7)(x+a-2)=0\\10x-x^2-a^2>0\end{cases}\qquad\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x-a-7=0\\x+a-2=0\end{array}\right.\\x^2-10x+25+a^2-25<0\end{cases}$$

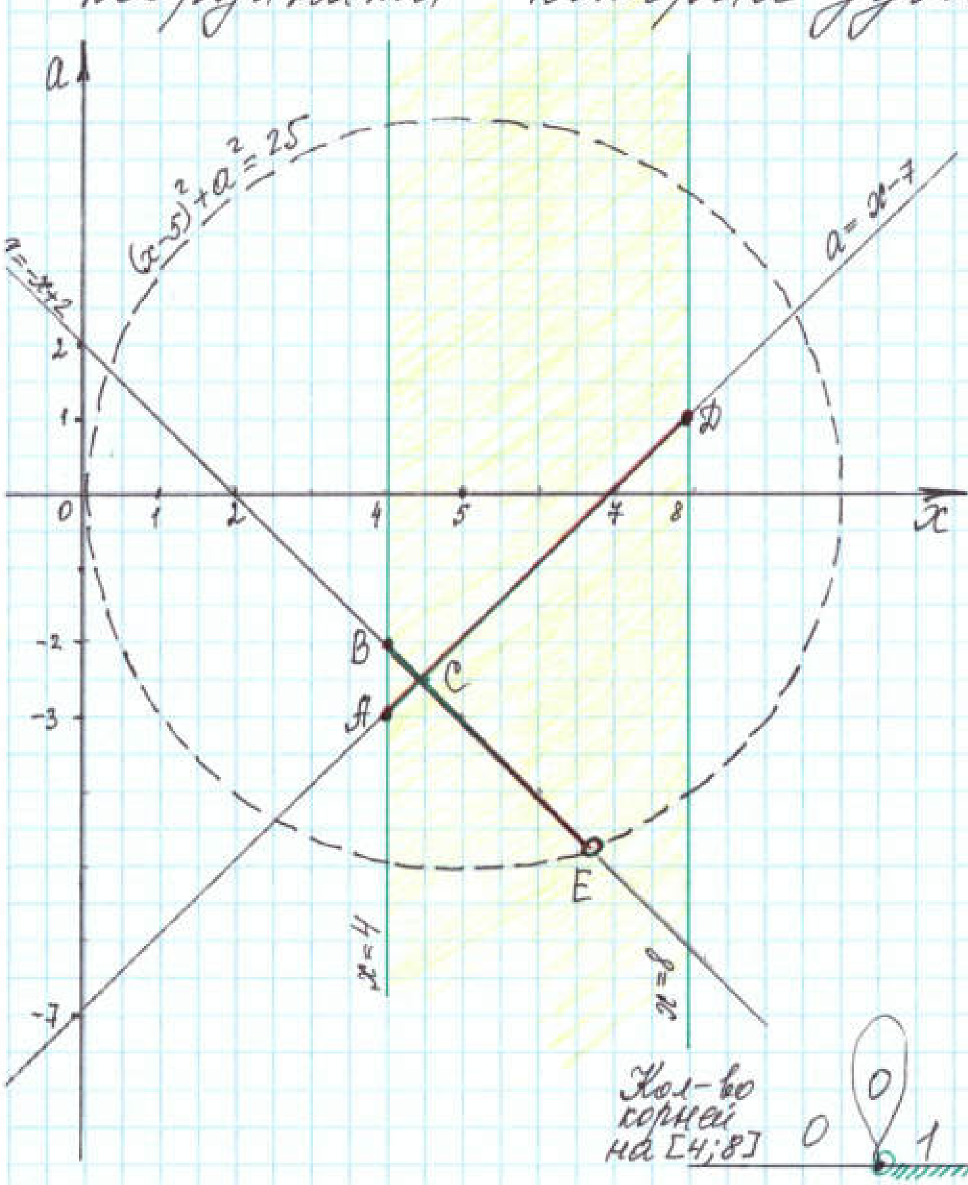
$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=x-7\\a=-x+2\end{array}\right.\\(x-5)^2+a^2<25\end{cases}$$

График – прямая: $(0;-7)$; $(7;0)$

График – прямая: $(0;2)$; $(2;0)$

Множество точек круга (без границы); $(5;0)$ – центр; $R=5$.

Изобразим множество точек плоскости xOa, координаты которых удовлетворяют системе.



A: $\begin{cases}x=4\\a=x-7\end{cases}\Rightarrow a=-3$

B: $\begin{cases}x=4\\a=-x+2\end{cases}\Rightarrow a=-2$

C: $\begin{cases}a=-x+2\\a=x-7\end{cases}$ $-x+2=x-7$; $2x=9$; $x=4{,}5\Rightarrow a=-2{,}5$

D: $\begin{cases}x=8\\a=x-7\end{cases}\Rightarrow a=1$

E: $\begin{cases}a=2-x\\(x-5)^2+a^2=25\end{cases}$ $x=2-a$

$(-3-a)^2+a^2=25$

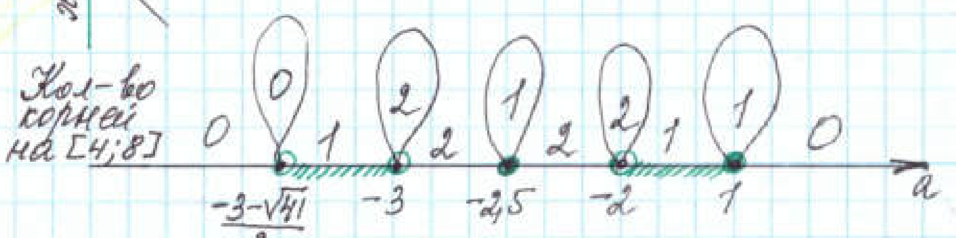
$9+6a+a^2+a^2-25=0$

$2a^2+6a-16=0$

$a^2+3a-8=0$

$a=\frac{-3\pm\sqrt{9+32}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{41}}{2}$

$a<0\Rightarrow a=\frac{-3-\sqrt{41}}{2}$



Ответ: $\left(\frac{-3-\sqrt{41}}{2};-3\right)\cup\{-2{,}5\}\cup(-2;1]$

18.3. 4) ЕГЭ-2017

a - ? ровно 1 корень на $[0;\pi]$

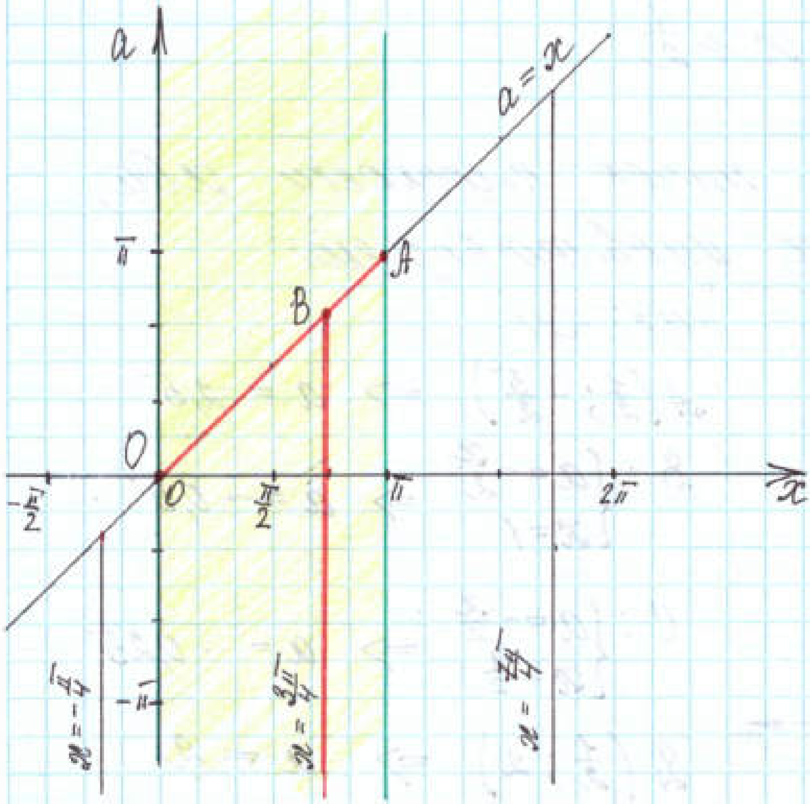
$\sqrt{x-a}\cdot\sin x = -\sqrt{x-a}\cdot\cos x$

$\sqrt{x-a}\cdot\sin x + \sqrt{x-a}\cdot\cos x = 0$

$\sqrt{x-a}\cdot(\sin x + \cos x) = 0$.

$\left[\begin{array}{l} x-a=0 \\ \begin{cases} \sin x+\cos x=0 \\ x-a\geq 0 \end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a=x \\ \begin{cases} \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=0 \\ a\leq x \end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a=x \\ \begin{cases} x+\frac{\pi}{4}=\pi k,\ k\in Z \\ a\leq x \end{cases}\end{array}\right.$

$(*)\left[\begin{array}{l} a=x \\ \begin{cases} x=-\frac{\pi}{4}+\pi k \\ a\leq x \end{cases}\end{array}\right.$ Изобразим множество точек плоскости xOa, координаты которых удовлетворяют условиям $(*)$.

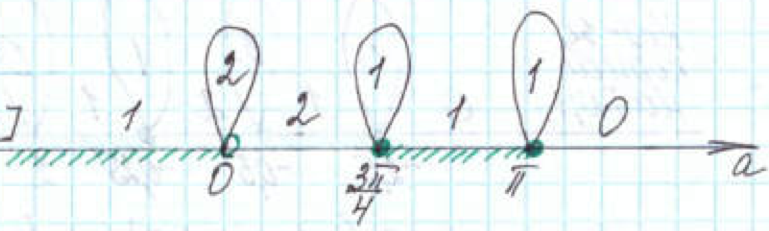


$A: \begin{cases} a=x \\ x=\pi \end{cases} \Rightarrow a=\pi$

$B: \begin{cases} x=\frac{3\pi}{4} \\ a=x \end{cases} \Rightarrow a=\frac{3\pi}{4}$

$O(0;0) \Rightarrow a=0$.

Кол-во корней на $[0;\pi]$



$a\in(-\infty;0)\cup[\frac{3\pi}{4};\pi]$

Ответ: $(-\infty;0)\cup[\frac{3\pi}{4};\pi]$

18.3. б) ЕГЭ-2017

a - ? ровно 1 корень на $[0;1]$

$$\sqrt{2x-1}\cdot\ln(4x-a)=\sqrt{2x-1}\cdot\ln(5x+a).$$

$$\sqrt{2x-1}\cdot\ln(4x-a)-\sqrt{2x-1}\cdot\ln(5x+a)=0.$$

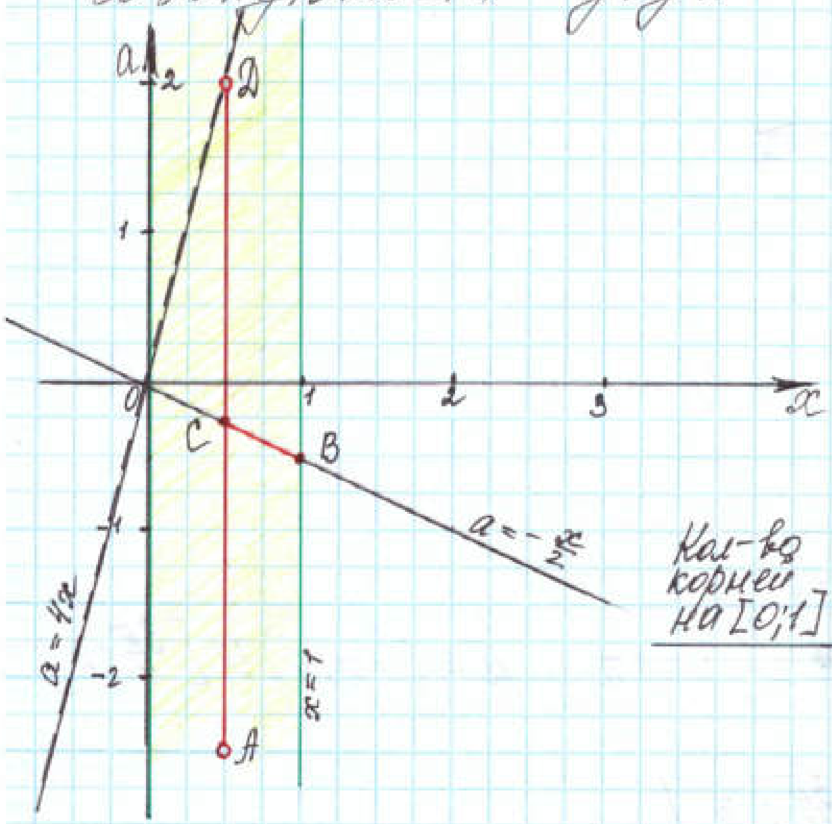
$$\sqrt{2x-1}\cdot\left(\ln(4x-a)-\ln(5x+a)\right)=0$$

$$\begin{cases}2x-1=0\\4x-a>0\\5x+a>0\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}\ln(4x-a)=\ln(5x+a)\\2x-1\geqslant 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\2-a>0\\\frac{5}{2}+a>0\end{cases} \qquad \begin{cases}4x-a=5x+a\\4x-a>0\\x\geqslant\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\-\frac{5}{2}<a<2\end{cases} \qquad \begin{cases}a=-\frac{x}{2}\\a<4x\\x\geqslant\frac{1}{2}\end{cases}$$

Изобразим множество точек плоскости xOa, координаты которых удовлетворяют совокупности двух систем.

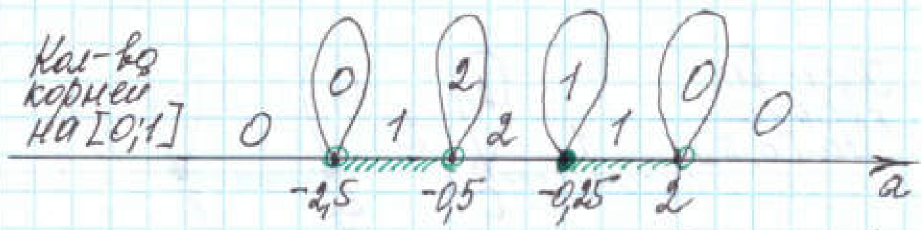


$A\left(\frac{1}{2};-\frac{5}{2}\right) \Rightarrow a=-2{,}5$

$B:\begin{cases}a=-\frac{x}{2}\\x=1\end{cases} \Rightarrow a=-0{,}5$

$C:\begin{cases}a=-\frac{x}{2}\\x=\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow a=-0{,}25$

$D\left(\frac{1}{2};2\right) \Rightarrow a=2.$



$a\in(-2{,}5;-0{,}5)\cup[-0{,}25;2)$

Ответ: $(-2{,}5;-0{,}5)\cup[-0{,}25;2)$.

Задание №18.3. Ответы.

1) $(-2;\ -1);\ (-1;\ 0);\ (0;\ 3);\ (3;\ 8);\ (8;\ +\infty).$

2) $(-\infty;\ 0,5);\ [2-\sqrt{2};\ 1].$

3) $\left(\dfrac{-3-\sqrt{41}}{2};\ -3\right);\ -2,5;\ (-2;\ 1].$

4) $(-\infty;\ 0);\ \left[\dfrac{3\pi}{4};\ \pi\right].$

5) $(-2,5;\ -0,5);\ [-0,25;\ 2).$

Задание №18.3 (ДЗ). Графические решения. Плоскость XOA (часть 1).

1) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{|9x| + 7x + 4a - 16}{x^2 + 2x - 3 + a} = 0$$

имеет единственное решение.

2) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x \cdot \sqrt{7(x + a - 1)} = \sqrt{7x - 4x(x + a) + 3(a - 1)}$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

3) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{(x + a + 2)(x - a - 8)}{\sqrt{x^2 - 14x + a^2 + 24}} = 0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 8]$.

4) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$3\cos^2 x \cdot \sqrt{a - x} = \sin^2 x \cdot \sqrt{a - x}$$

имеет ровно два различных корня на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

5) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2 - 5x} \cdot \ln(36x^2 - a^2) = \sqrt{2 - 5x} \cdot \ln(6x + a)$$

имеет ровно один корень.

18.3. (Д3) 1)

а – ? единственное решение

$$\frac{9|x|+7x+4a-16}{x^2+2x-3+a}=0$$

$$\begin{cases} 9|x|+7x+4a-16=0 \\ x^2+2x-3+a\neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=\frac{1}{4}(-9|x|-7x+16) & (1) \\ a\neq -x^2-2x+3 & (2) \end{cases}$$

(1) Если $x\geq 0$, то $a=\frac{1}{4}(-9x-7x+16)$, $a=-4x+4$

Если $x<0$, то $a=\frac{1}{4}(9x-7x+16)$, $a=\frac{1}{2}x+4$

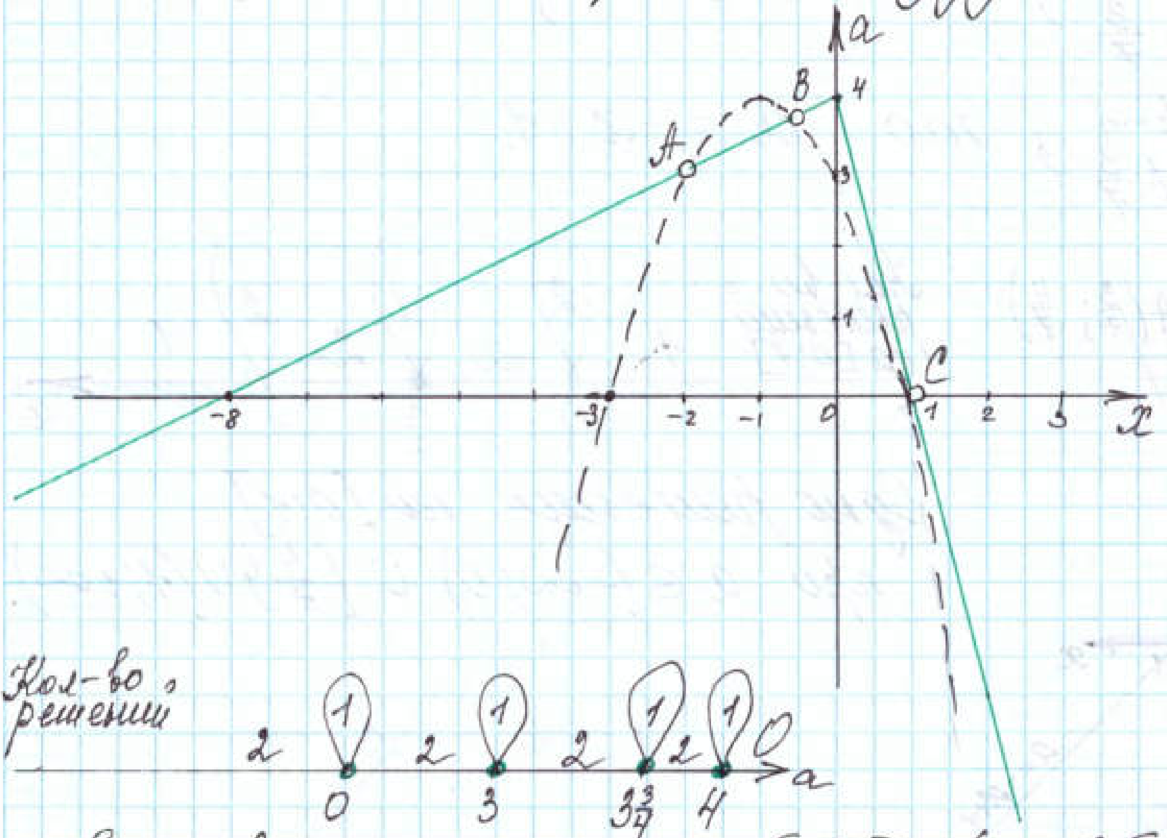
График – совокупность двух лучей.

(2) $a=-x^2-2x+3$

График – парабола, ветви вниз, $x_в=\frac{2}{-2}=-1$

$(-1;4)$ вершина; $(1;0)$; $(-3;0)$.

Точки этой параболы будут выколоты.



$A(-2;3)$

$B:\ \frac{1}{2}x+4=-x^2-2x+3$

$x^2+2{,}5x+1=0$

$2x^2+5x+2=0$

$\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$

$B\left(-\frac{1}{2};3\frac{3}{4}\right)$

$C:\ -4x+4=-x^2-2x+3$

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$x=1$

$C(1;0)$.

Единственное решение будет при $a\in\{0;3;3\frac{3}{4};4\}$.

Ответ: $0;\ 3;\ 3\frac{3}{4};\ 4$.

18.3. Д3 2)

a – ? ровно 1 корень на $[0;1]$

$$x\cdot\sqrt{7(x+a-1)}=\sqrt{7x-4x(x+a)+3(a-1)}$$

Возведем обе части уравнения в квадрат, т. к. $x\in[0;1]$.

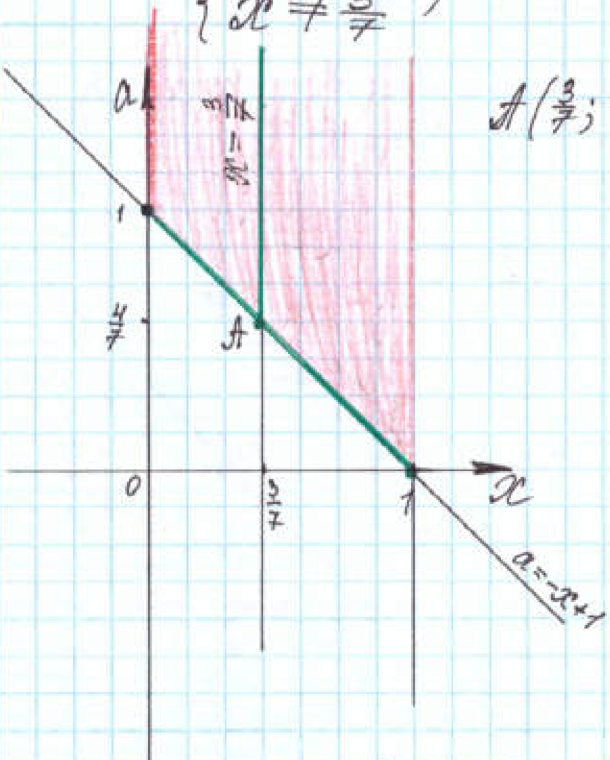
$$\begin{cases} x^2(7(x+a-1))=7x-4x(x+a)+3(a-1) \\ x+a-1\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x^3+7ax^2-7x^2-7x+4x^2+4ax-3a+3=0 \\ a\geq -x+1 \end{cases}$$

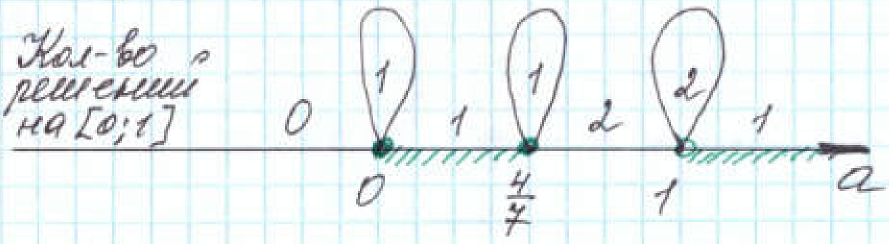
$$\begin{cases} a(x+1)(x-\frac{3}{7})=-(x-1)(x+1)(x-\frac{3}{7}) \\ a\geq -x+1 \end{cases}$$

Если $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{3}{7} \end{array}\right.$, то $\begin{cases} a\cdot 0=0 \\ a\geq -x+1 \end{cases}$ $a\geq -x+1.$

Если $\begin{cases} x\neq -1 \\ x\neq\frac{3}{7} \end{cases}$, то $\begin{cases} a=-x+1 \\ a\geq -x+1 \end{cases}$ $a=-x+1.$



$A(\frac{3}{7};\frac{4}{7})$



Ровно один корень на $[0;1]$ при $a\in[0;\frac{4}{7}]\cup(1;+\infty)$.

Ответ: $[0;\frac{4}{7}]\cup(1;+\infty)$.

18.3. Д3 3)

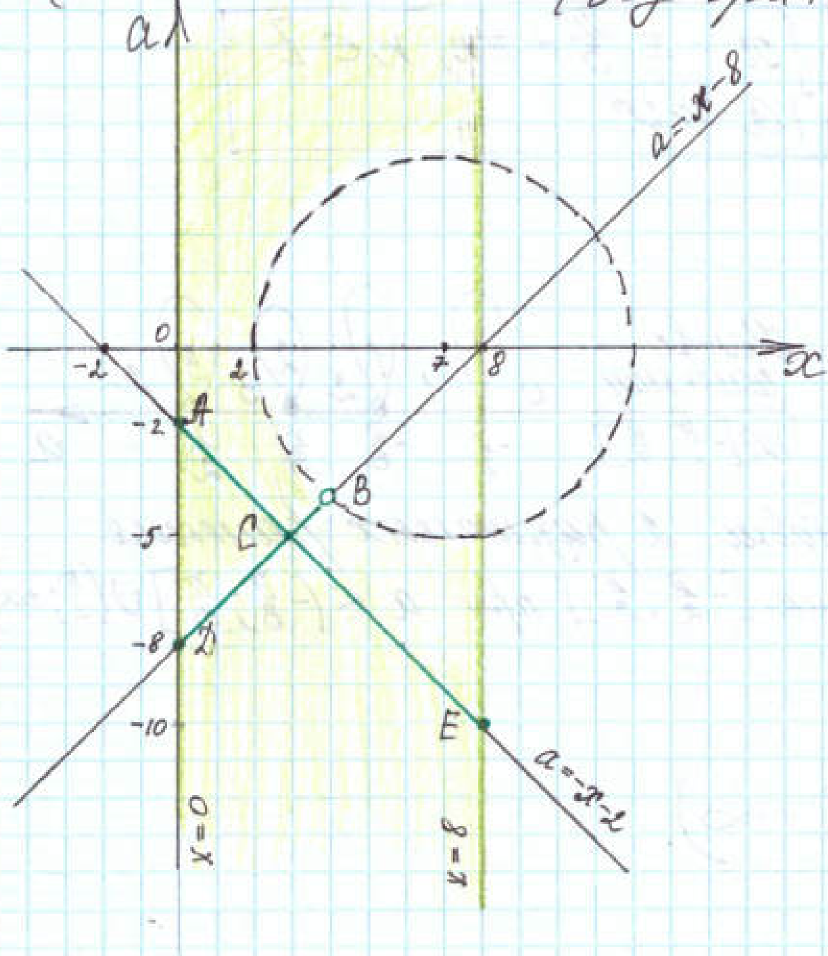
a – ? ровно 1 корень на $[0;8]$

$$\frac{(x+a+2)(x-a-8)}{\sqrt{x^2-14x+a^2+24}}=0.$$

$$\begin{cases}(x+a+2)(x-a-8)=0\\ x^2-14x+a^2+24>0\end{cases} \quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=-x-2\\ a=x-8\end{array}\right.\\ (x-7)^2+a^2>25\end{cases}$$

$\left[\begin{array}{l}a=-x-2\\ a=x-8\end{array}\right.$ Совокупность двух прямых

$(x-7)^2+a^2>25$ Внешняя часть круга (без границы); $(7;0)$ - центр, $R=5$.



$A(0;-2)$

$C: x-8=-x-2$

$2x=6$

$x=3 \Rightarrow a=-5$

$C(3;-5)$

$B: (x-7)^2+(x-8)^2=25$

$x^2-14x+49+x^2-16x+64=25$

$2x^2-30x+88=0$

$x^2-15x+44=0$

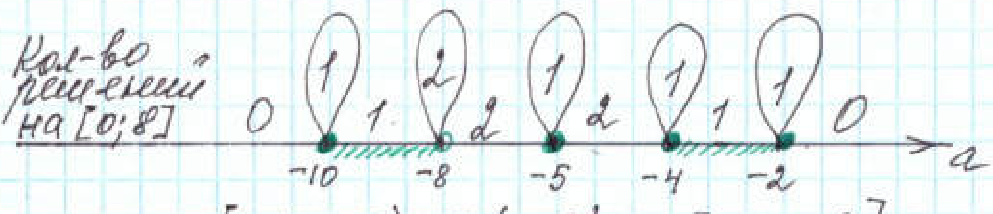
$x=\frac{15\pm\sqrt{225-176}}{2}=\frac{15\pm 7}{2}$

$\left[\begin{array}{l}x=11\\ x=4 \Rightarrow a=-4\end{array}\right.$

$B(4;-4)$

$D(0;-8)$

$E(8;-10)$



$a\in[-10;-8)\cup\{-5\}\cup[-4;-2]$

Ответ: $[-10;-8)\cup\{-5\}\cup[-4;-2]$

18.3 ДЗ 4)

a - ? ровно 2 различных корня на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$$3\cos^2 x \cdot \sqrt{a-x} = \sin^2 x \sqrt{a-x}$$

$$3\cos^2 x \cdot \sqrt{a-x} - \sin^2 x \cdot \sqrt{a-x} = 0$$

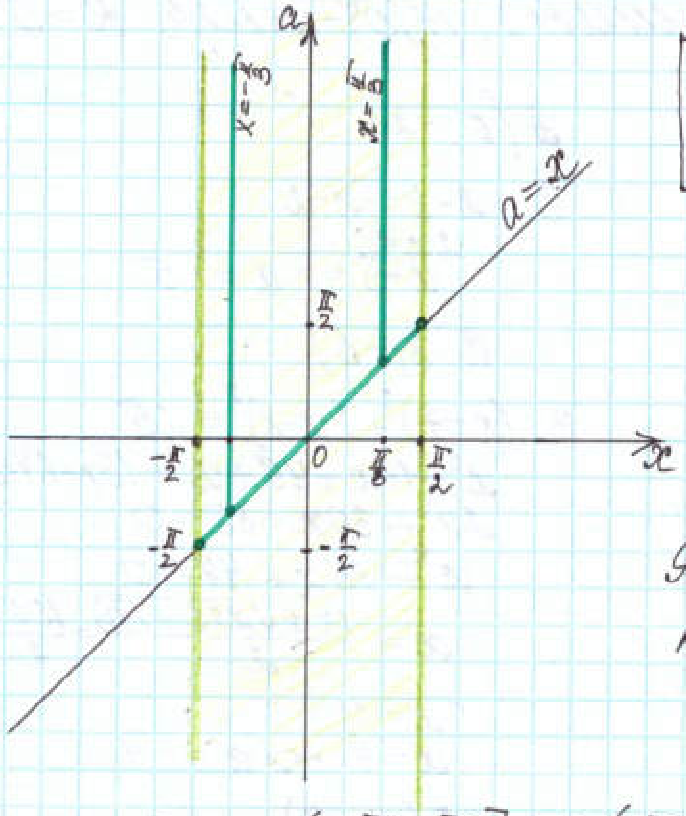
$$\sqrt{a-x} \cdot (3\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

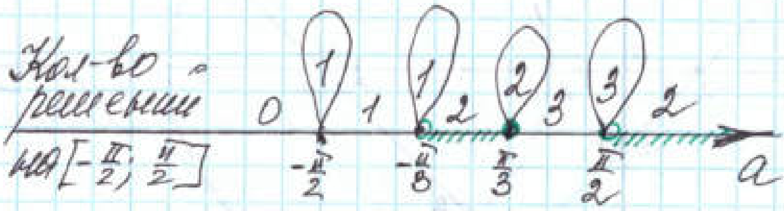
$a - x = 0$ или $\begin{cases} 3\cos^2 x - \sin^2 x = 0 \\ a - x \geqslant 0 \end{cases}$

$\boxed{a = x}$

$\begin{cases} tg^2 x = 3 \\ a \geqslant x \end{cases}$ $\begin{cases} tg x = \pm\sqrt{3} \\ a \geqslant x \end{cases}$

$$\boxed{\begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, \ k \in Z \\ a \geqslant x \end{cases}}$$





Ровно 2 различных решения на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ при $a \in \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}; +\infty\right)$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}; +\infty\right)$.

$\boxed{18.3}$ (23) 5)

$a-?$ ровно 1 корень

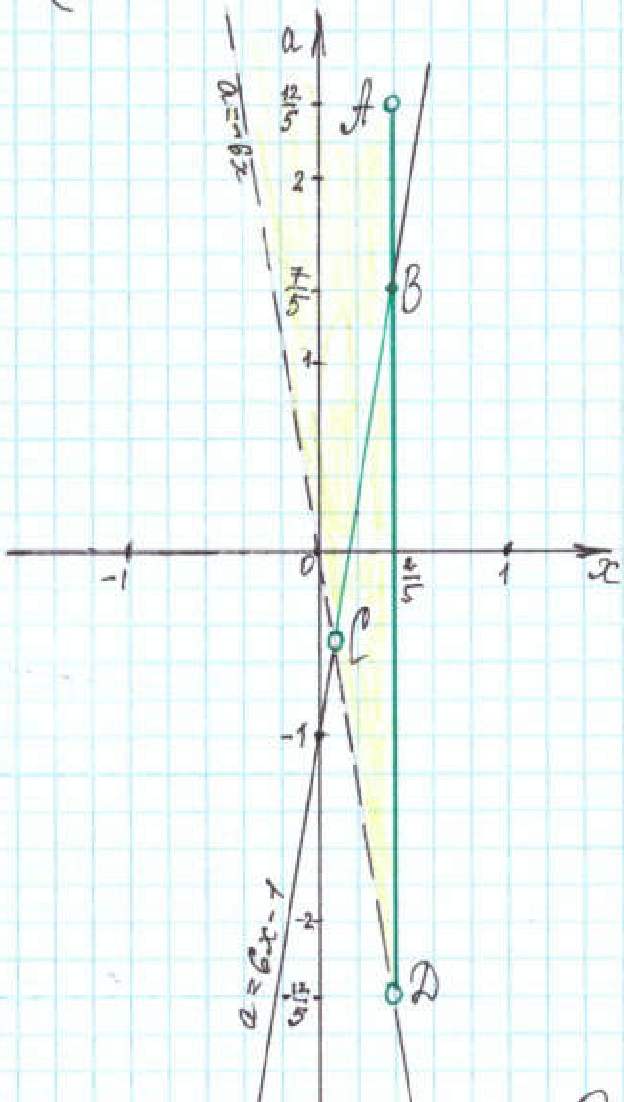
$$\sqrt{2-5x}\cdot\ln(36x^2-a^2)=\sqrt{2-5x}\cdot\ln(6x+a)$$

$$\sqrt{2-5x}\cdot\left(\ln(6x-a)(6x+a)-\ln(6x+a)\right)=0$$

$$\begin{cases}2-5x=0\\6x+a>0\\6x-a>0\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}\ln(6x-a)(6x+a)=\ln(6x+a)\\2-5x\geq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{2}{5}\\a>-\frac{12}{5}\\a<\frac{12}{5}\end{cases}\qquad \begin{cases}(6x-a)(6x+a)=6x+a\\6x+a>0\\x\leq\frac{2}{5}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{2}{5}\\-\frac{12}{5}<a<\frac{12}{5}\end{cases}\qquad \begin{cases}a>-6x\\x<\frac{2}{5}\\6x-a=1\end{cases}\quad \begin{cases}a>-6x\\x<\frac{2}{5}\\a=6x-1\end{cases}$$



$A\left(\frac{2}{5};\frac{12}{5}\right)\quad a=\frac{12}{5}$

$B\left(\frac{2}{5};\frac{7}{5}\right)\quad a=\frac{7}{5}$

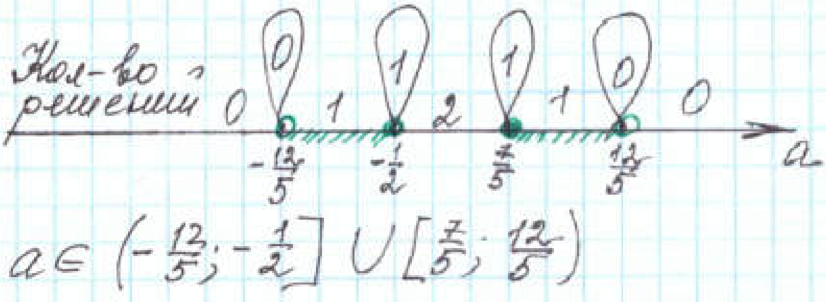
$C:\ -6x=6x-1$

$12x=1$

$x=\frac{1}{12}\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$

$C\left(\frac{1}{12};-\frac{1}{2}\right)$

$D\left(\frac{2}{5};-\frac{12}{5}\right)$



$a\in\left(-\frac{12}{5};-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{7}{5};\frac{12}{5}\right)$

<u>Ответ:</u> $\left(-\frac{12}{5};-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{7}{5};\frac{12}{5}\right)$

Задание №18.3 (ДЗ). Ответы.

1) $0;\ 3;\ 3,75;\ 4.$

2) $\left[\dfrac{3}{4};\ \dfrac{4}{7}\right];\ (1;\ +\infty).$

3) $[-10;\ -8);\ -5;\ [-4;\ -2].$

4) $\left(-\dfrac{\pi}{3};\ \dfrac{\pi}{3}\right];\ \left(\dfrac{\pi}{2};\ +\infty\right).$

5) $(-2,4;\ -0,5];\ [1,4;\ 2,4).$

Задание №18.4. Графические решения. Плоскость XOA (часть 2).

1) (ЕГЭ-2017)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{5x-3}\cdot\ln(x^2-6x+10-a^2)=0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;3]$.

2) (ЕГЭ-2017)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} |x|+|a|\leqslant 4, \\ x^2+8x<16a+48 \end{cases}$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[-1;0]$.

3) (ЕГЭ-2017)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ax\geqslant 2, \\ \sqrt{x-1}>a, \\ 3x\leqslant 2a+11 \end{cases}$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[3;4]$.

4) (ЕГЭ-2013)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|\sin^2 x+2\cos x+a|=\sin^2 x+\cos x-a$$

имеет единственный корень на промежутке $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$.

5) (ЕГЭ-2012)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$|x^2-8x+a+5|>10$$

не имеет решений на отрезке $[a-6;a]$.

18.4. 1) ЕГЭ-2017

a – ? ровно 1 корень на $[0;3]$

$$\sqrt{5x-3}\cdot\ln(x^2-6x+10-a^2)=0.$$

$\begin{cases}5x-3=0\\ x^2-6x+10-a^2>0\end{cases}$ или $\begin{cases}\ln(x^2-6x+10-a^2)=0\\ 5x-3\geq 0\end{cases}$

$\begin{cases}x=\frac{3}{5}\\ (x-3)^2+1-a^2>0\end{cases}$

$\begin{cases}\frac{144+25}{25}-a^2>0\\ x=\frac{3}{5}\end{cases}$

$\begin{cases}x=\frac{3}{5}\\ \left(a-\frac{13}{5}\right)\left(a+\frac{13}{5}\right)<0\end{cases}$

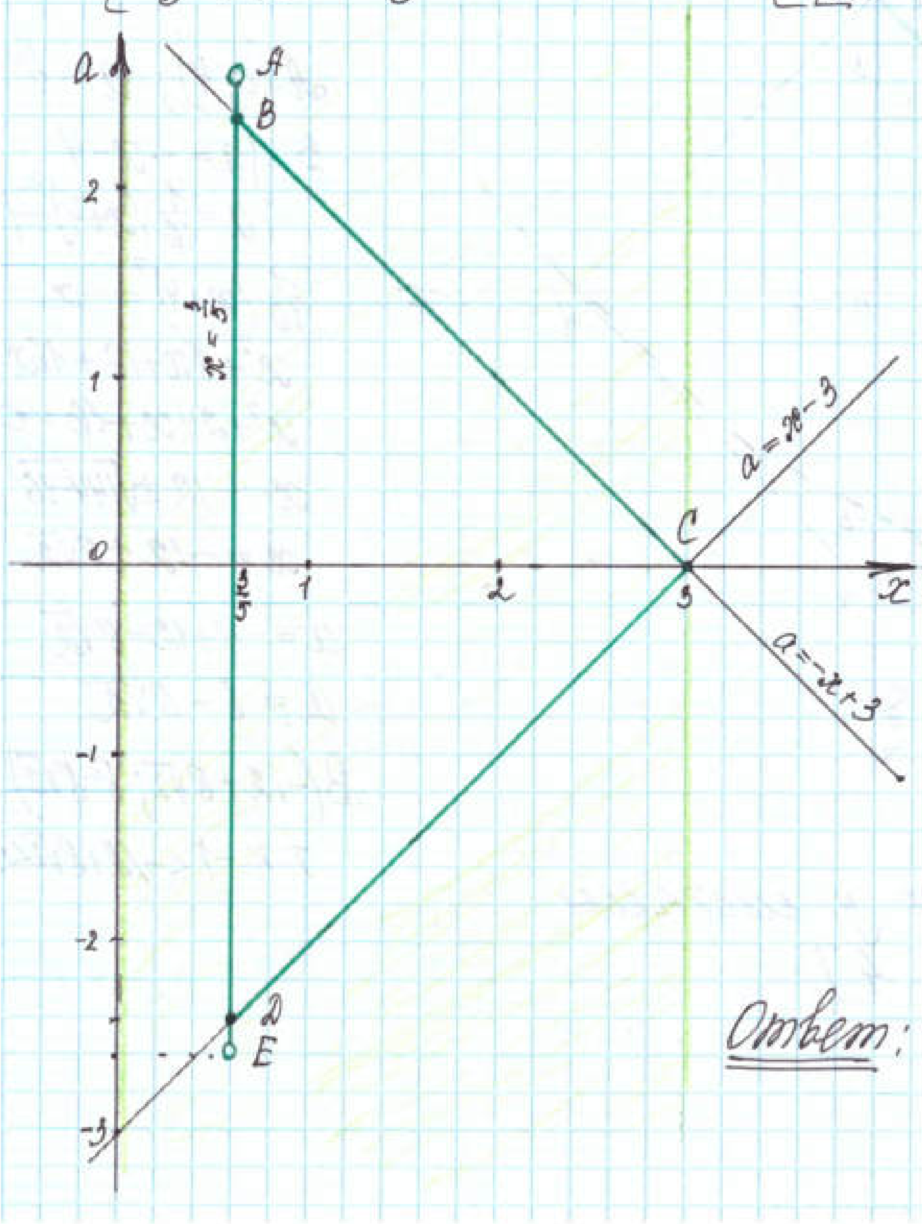
$\begin{cases}x=\frac{3}{5}\\ -\frac{13}{5}<a<\frac{13}{5}\end{cases}$

$\begin{cases}x^2-6x+10-a^2=1\\ x\geq\frac{3}{5}\end{cases}$

$\begin{cases}x\geq\frac{3}{5}\\ (x-3)^2-a^2=0\end{cases}$

$\begin{cases}x\geq\frac{3}{5}\\ (x-3-a)(x-3+a)=0\end{cases}$

$\begin{cases}x\geq\frac{3}{5}\\ \left[\begin{array}{l}a=x-3\\ a=-x+3\end{array}\right.\end{cases}$



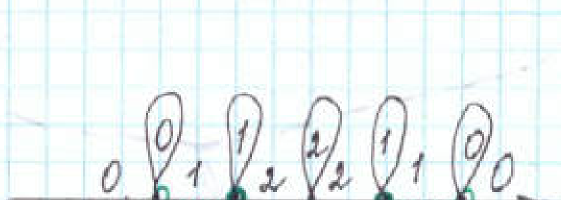
$A\left(\frac{3}{5};\frac{13}{5}\right)$ $a=\frac{13}{5}$

$B\left(\frac{3}{5};\frac{12}{5}\right)$ $a=\frac{12}{5}$

$C(3;0)$ $a=0$

$Д\left(\frac{3}{5};-\frac{12}{5}\right)$ $a=-\frac{12}{5}$

$E\left(\frac{3}{5};-\frac{13}{5}\right)$ $a=-\frac{13}{5}$



$a\in\left(-\frac{13}{5};-\frac{12}{5}\right]\cup\left[\frac{12}{5};\frac{13}{5}\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{13}{5};-\frac{12}{5}\right]\cup\left[\frac{12}{5};\frac{13}{5}\right)$

18.4. 2) ЕГЭ – 2017

a – ? хотя бы один корень на $[-1;0]$

$$\begin{cases} |x| + |a| \le 4 \\ x^2 + 8x < 16a + 48 \end{cases}$$

(1) $|x| + |a| \le 4$.

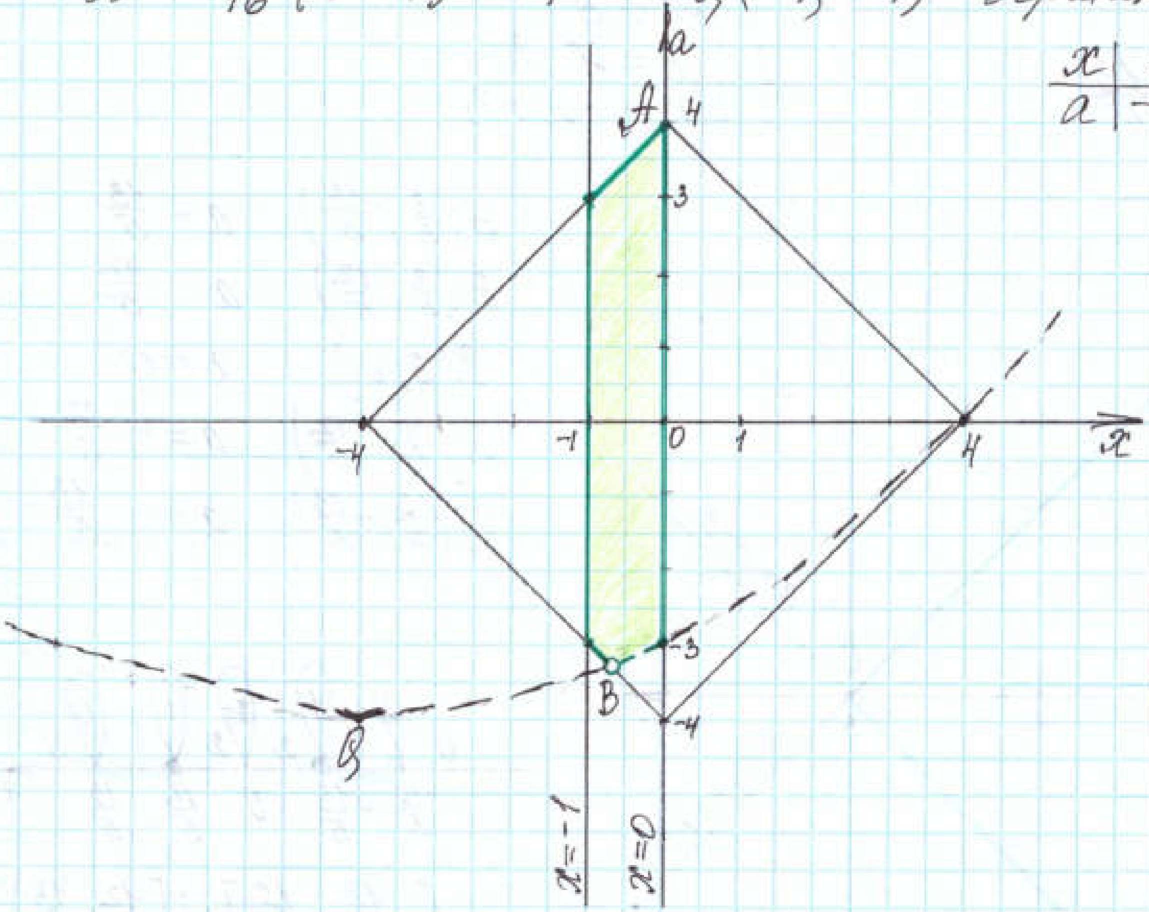
Неравенство симметрично относительно x и относительно a, поэтому можно построить часть графика при $x \ge 0$, $a \ge 0$, а потом отобразить от оси Ox и от оси Oa.

$x + a \le 4$; $a \le -x + 4$.

(2) $x^2 + 8x < 16a + 48$; $16a > x^2 + 8x - 48$; $16a > (x+4)^2 - 64$

$a > \frac{1}{16}(x+4)^2 - 4$ $Q(-4;-4)$ – вершина параболы.

x	0	4
a	-3	0



$A(0;4)$; $a = 4$.

$B: \begin{cases} a = -x - 4 \\ a = \frac{1}{16}(x+4)^2 - 4 \end{cases}$

$\frac{1}{16}(x+4)^2 = -x$

$x^2 + 8x + 16 + 16x = 0$

$x^2 + 24x + 16 = 0$

$x = -12 \pm \sqrt{144 - 16}$

$x = -12 \pm 8\sqrt{2}$

$a = -4 + 12 - 8\sqrt{2}$

$a = 8 - 8\sqrt{2}$

$B(-12 + 8\sqrt{2}; 8 - 8\sqrt{2})$

т.к. $-1 < -12 + 8\sqrt{2} < 0$

Хотя бы одно решение у системы будет при $a \in (8 - 8\sqrt{2}; 4]$

<u>Ответ</u>: $(8 - 8\sqrt{2}; 4]$

18.4. 3) ЕГЭ-2017

a - ? хотя бы один корень на $[3;4]$

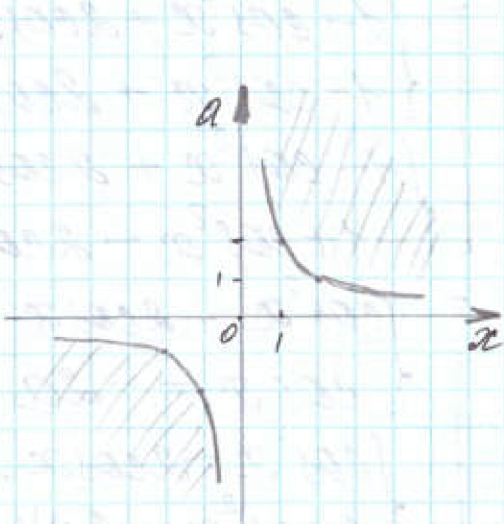
$$\begin{cases} ax \geqslant 2 \\ \sqrt{x-1} > a \\ 3x \leq 2a+11 \end{cases}$$

(1) $ax \geqslant 2$

При $x=0$ получаем $0 \geqslant 2$ неверно.

При $x>0$ $\quad a \geqslant \frac{2}{x}$

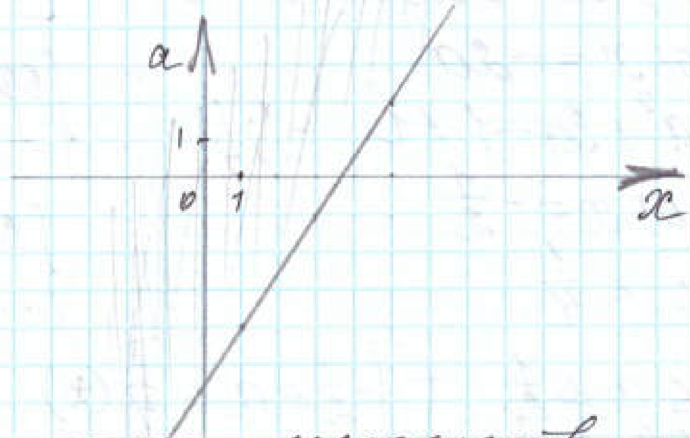
При $x<0$ $\quad a \leq \frac{2}{x}$



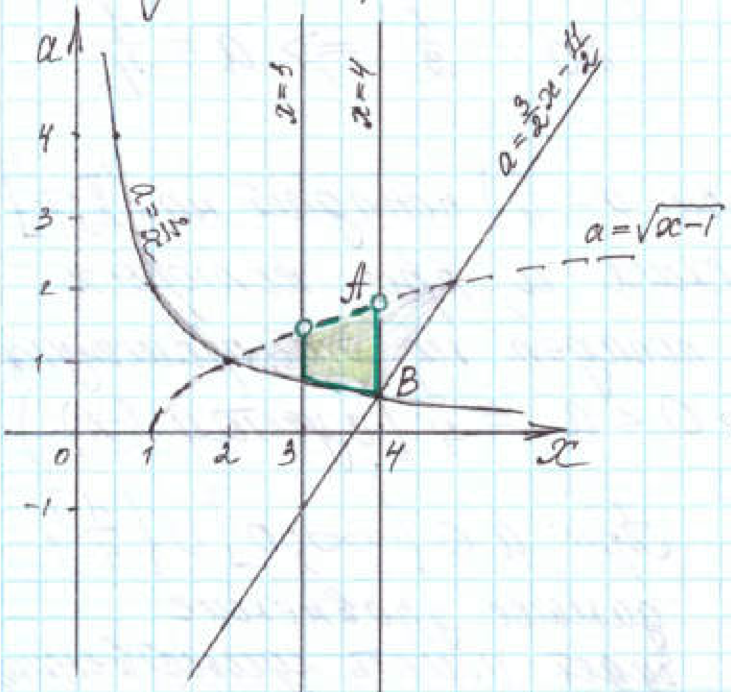
(2) $a < \sqrt{x-1}$

(3) $2a \geqslant 3x-11$

$a \geqslant \frac{3}{2}x - \frac{11}{2}$



Найдём пересечение этих множеств



$A: \begin{cases} x=4 \\ a=\sqrt{x-1} \end{cases} \Rightarrow a=\sqrt{3}$

$B: \begin{cases} x=4 \\ a=\frac{2}{x} \end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

Хотя бы одно решение будет при $a \in [\frac{1}{2}; \sqrt{3})$.

Ответ: $[\frac{1}{2}; \sqrt{3})$

18.4. 4) ЕГЭ – 2013

a – ? единственный корень на $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

$$|\sin^2 x + 2\cos x + a| = \sin^2 x + \cos x - a.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1-\cos^2 x + 2\cos x + a \geq 0\\ 1-\cos^2 x + 2\cos x + a = 1-\cos^2 x + \cos x - a\end{cases}\\ \begin{cases}1-\cos^2 x + 2\cos x + a < 0\\ -1+\cos^2 x - 2\cos x - a = 1-\cos^2 x + \cos x - a\end{cases}\end{array}\right.$$

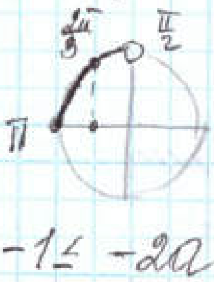
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos^2 x - 2\cos x \leq a+1\\ \cos x = -2a\end{cases}\\ \begin{cases}\cos^2 x - 2\cos x > a+1\\ 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4a^2 + 4a - a - 1 \leq 0\\ \cos x = -2a\end{cases}\\ \begin{cases}\cos^2 x - 2\cos x > a+1\\ \left[\begin{array}{l}\cos x = 2 \text{ нет реш.}\\ \cos x = -\frac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x = -2a\\ 4a^2 + 3a - 1 \leq 0 \quad -1;\frac{1}{4}\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x = -\frac{1}{2}\\ a < \frac{1}{4}\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x = -2a\\ -1 \leq a \leq \frac{1}{4}\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x = -\frac{1}{2}\\ a < \frac{1}{4}\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1 \leq -2a \leq 1\\ -1 \leq a \leq \frac{1}{4}\\ \cos x = -2a\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x = -\frac{1}{2}\\ a < \frac{1}{4}\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}\\ -1 \leq a \leq \frac{1}{4}\\ \cos x = -2a\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x = -\frac{1}{2}\\ a < \frac{1}{4}\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{4} \ (*)\\ \cos x = -2a\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x = -\frac{1}{2}\\ a < \frac{1}{4}\end{cases}\end{array}\right.$$

Проверим совпадение решений:

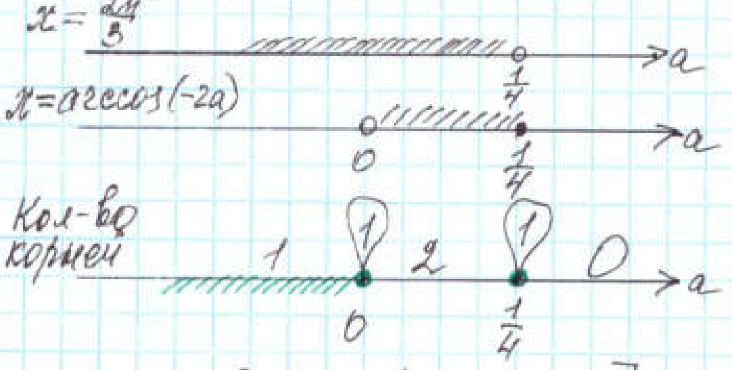
$-2a = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$.



Корень $x = \frac{2\pi}{3}$ (при $a < \frac{1}{4}$) попадает на $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

Найдем те значения a, при которых и второй корень попадет на этот промежуток

$-1 \leq -2a < 0$; $0 < a \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < a \leq \frac{1}{4}$ (с учетом $(*)$)



При $a \in (-\infty; 0] \cup \left\{\frac{1}{4}\right\}$ данное уравнение будет иметь единственный корень на $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

Ответ: $(-\infty; 0] \cup \left\{\frac{1}{4}\right\}$.

18.4 5) ЕГЭ - 2012

a - ? не имеет решений на $[a-6; a]$

$$|x^2-8x+a+5|>10.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-8x+a+5>10 \\ x^2-8x+a+5<-10 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2-8x-5+a>0 \\ x^2-8x+15+a<0 \end{array}\right.$$

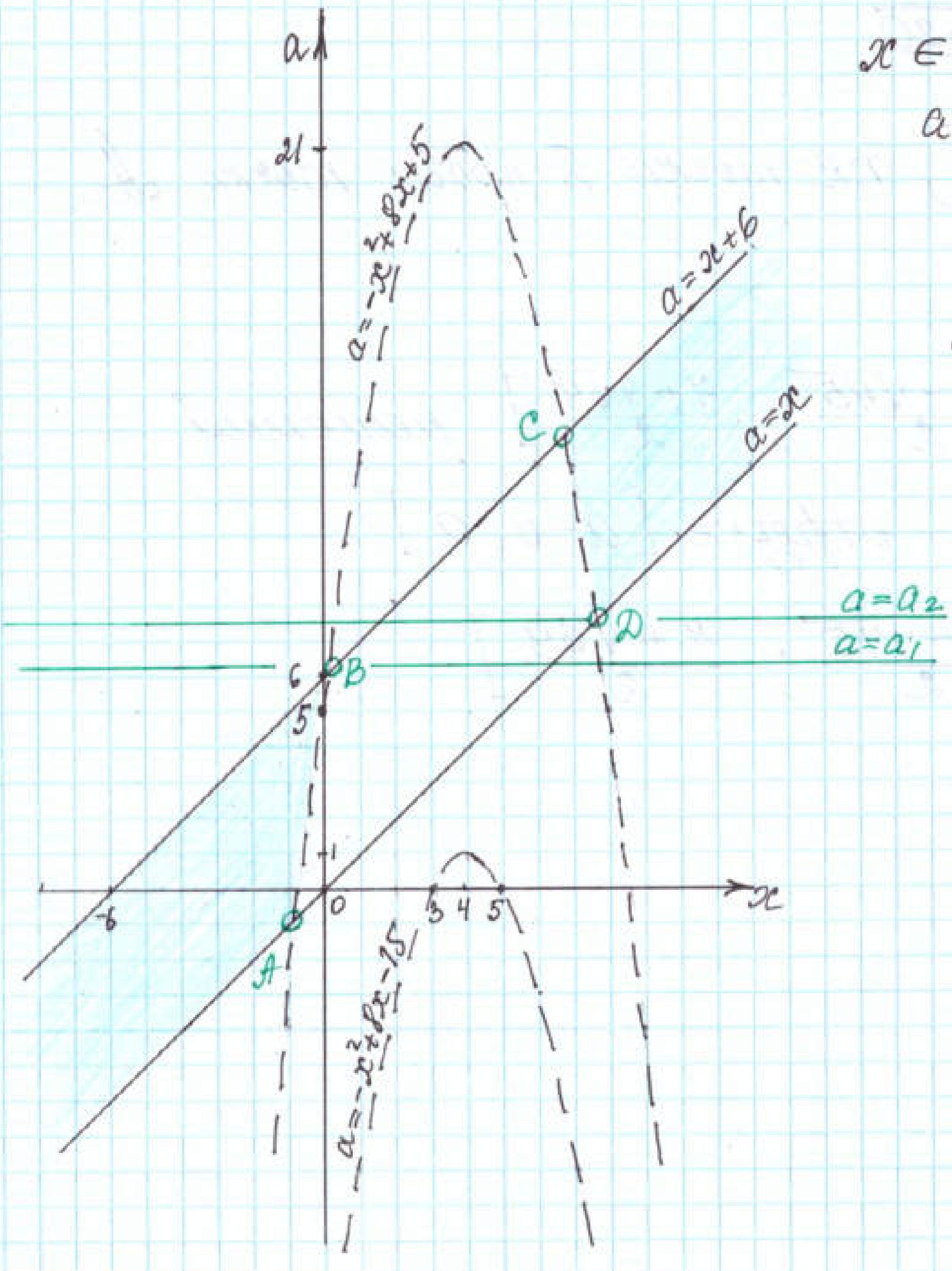
$$\left[\begin{array}{l} a>-(x^2-8x-5) \\ a<-(x^2-8x+15) \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} a>-(x-4)^2+21 \\ a<-(x-4)^2+1 \end{array}\right.$$

$a(x)=-(x-4)^2+21$ парабола, ветви вниз

$(4;21)$ вершина ; $(0;5)$

$a(x)=-(x-4)^2+1$ парабола, ветви вниз

$(4;1)$ вершина ; $(0;-15)$.



$x \in [a-6; a]$

$a-6 \le x \le a$

$$\left\{\begin{array}{l} a \le x+6 \\ a \ge x \end{array}\right.$$

На рисунке выделено мн-во точек плоскости, при которых решения есть. При $a_1 \le a \le a_2$ решений нет. Найдем a_1 и a_2.

$B: \quad -x^2+8x+5=x+6$

$x^2-7x+1=0$

$x=\frac{7\pm\sqrt{49-4}}{2}$

$x=\frac{7\pm\sqrt{45}}{2}$

$x=\frac{7-\sqrt{45}}{2}$, т.к. точка B левее точки C

$a_1=\frac{7-\sqrt{45}}{2}+6=\frac{7-\sqrt{45}+12}{2}=\frac{19-\sqrt{45}}{2}$

$D: \quad -x^2+8x+5=x$

$x^2-7x-5=0$

$x=\frac{7\pm\sqrt{49+20}}{2}$

$x=\frac{7+\sqrt{69}}{2}$, т.к. точка D правее точки A.

$a_2=\frac{7+\sqrt{69}}{2}$

При $a\in\left[\frac{19-\sqrt{45}}{2};\ \frac{7+\sqrt{69}}{2}\right]$ решений не будет на отрезке $[a-6; a]$.

Ответ: $\left[\frac{19-\sqrt{45}}{2};\ \frac{7+\sqrt{69}}{2}\right]$

Задание №18.4. Ответы.

1) $(-2,6;\ -2,4];\ [2,4;\ 2,6)$.

2) $(-8-8\sqrt{2};\ 4]$.

3) $[0,5;\ \sqrt{3})$.

4) $(-\infty;\ 0];\ \dfrac{1}{4}$.

5) $\left[\dfrac{19-\sqrt{45}}{2};\ \dfrac{7+\sqrt{69}}{2}\right]$.

Задание №18.4 (ДЗ). Графические решения. Плоскость XOA (часть 2).

1) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{4-x}\cdot\ln(a^2-x^2+4x-3)=0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[1;5]$.

2) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} |x-1|+|a-1|>3, \\ x^2+2\leqslant a+4x \end{cases}$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[1;4]$.

3) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ax-4\geqslant 0, \\ a+\sqrt{4x+17}\geqslant 0, \\ a-1<x \end{cases}$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[-3;-2]$.

4) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|\cos^2 x+9\sin x-a-6|=\cos^2 x+a$$

имеет единственный корень на промежутке $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

5) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$|x^2-6x-a+8|<1$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[a+1;a+3]$.

18.4. Д3 1)

a - ? ровно 1 корень на $[1;5]$

$$\sqrt{4-x}\cdot\ln(a^2-x^2+4x-3)=0.$$

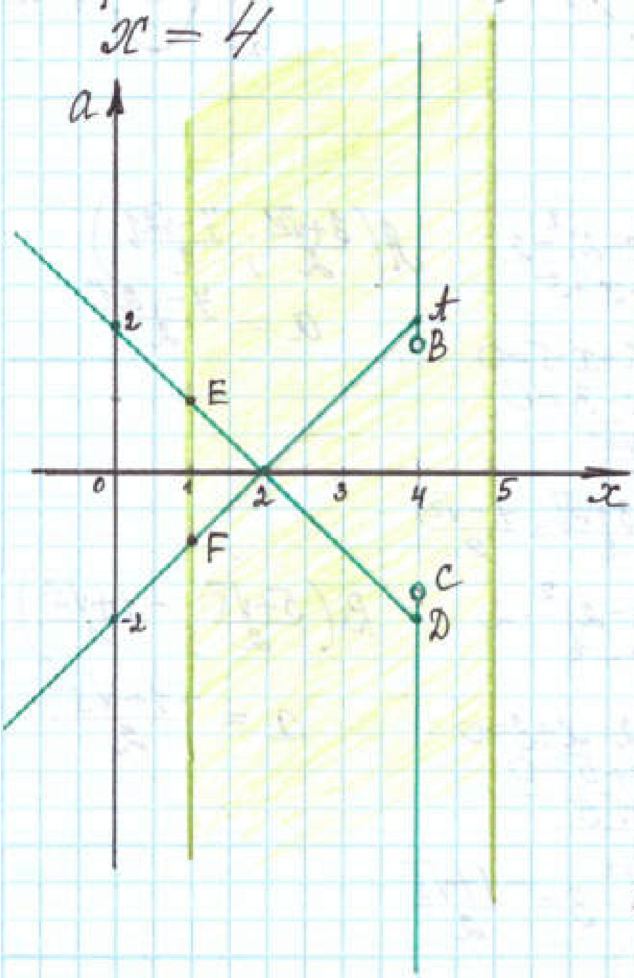
$$\begin{cases}4-x=0\\ a^2-x^2+4x-3>0\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}\ln(a^2-x^2+4x-3)=0\\ 4-x\geq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=4\\ a^2-16+16-3>0\end{cases} \qquad \begin{cases}a^2-x^2+4x-3=1\\ x\leq 4\end{cases}$$

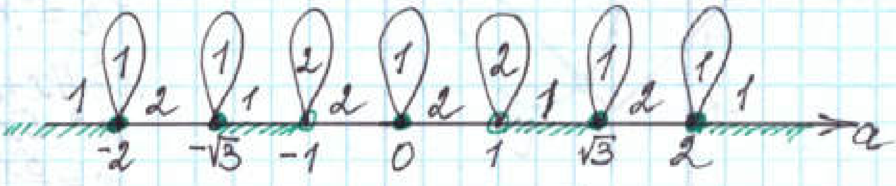
$$\begin{cases}x=4\\ (a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})>0\end{cases} \qquad \begin{cases}a^2-(x-2)^2=0\\ x\leq 4\end{cases}$$

При $a\in(-\infty;-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};+\infty)$
$x=4$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=x-2\\ a=-x+2\end{array}\right.\\ x\leq 4\end{cases}$$



$A(4;2)$ $a=2$
$B(4;\sqrt{3})$ $a=\sqrt{3}$
$C(4;-\sqrt{3})$ $a=-\sqrt{3}$
$D(4;-2)$ $a=-2$
$E(1;1)$ $a=1$
$F(1;-1)$ $a=-1$



$a\in(-\infty;-2]\cup[-\sqrt{3};-1)\cup\{0\}\cup(1;\sqrt{3}]\cup[2;+\infty)$

Ответ: $(-\infty;-2]\cup[-\sqrt{3};-1)\cup\{0\}\cup(1;\sqrt{3}]\cup[2;+\infty)$

$\boxed{18.4.}$ Д3 2)

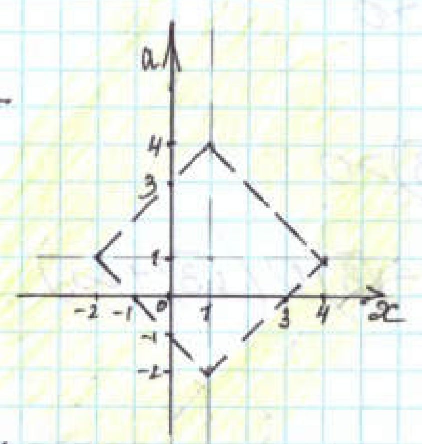
a – ? хотя бы 1 корень на $[1;4]$

$$\begin{cases} |x-1|+|a-1|>3 \\ x^2+2 \le a+4x \end{cases}$$

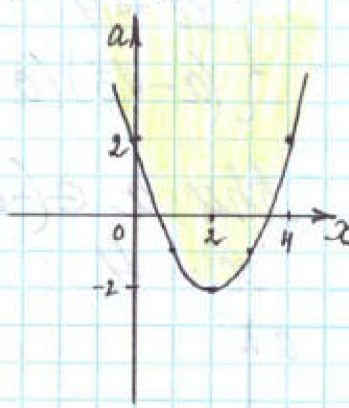
$$\begin{cases} |a-1|>3-|x-1| \\ a \geqslant x^2-4x+2 \end{cases}$$

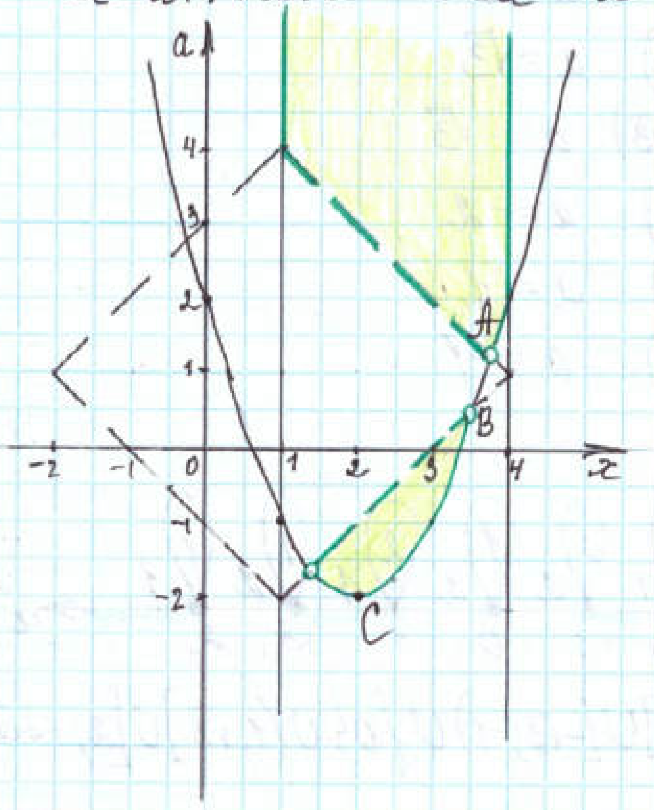
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} |a-1|>4-x, \text{ если } x\geqslant 1 \\ |a-1|>2+x, \text{ если } x<1 \end{array}\right. & (1) \\ a \geqslant (x-2)^2-2 & (2) \end{cases}$$

$$(1)\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a-1\geqslant 0 \\ x\geqslant 1 \\ a-1>4-x \end{cases} \\ \begin{cases} a-1<0 \\ x\geqslant 1 \\ -a+1>4-x \end{cases} \\ \begin{cases} a-1\geqslant 0 \\ x<1 \\ a-1>2+x \end{cases} \\ \begin{cases} a-1<0 \\ x<1 \\ -a+1>2+x \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\geqslant 1 \\ x\geqslant 1 \\ a>-x+5 \end{cases} \\ \begin{cases} a<1 \\ x\geqslant 1 \\ a<x-3 \end{cases} \\ \begin{cases} a\geqslant 1 \\ x<1 \\ a>x+3 \end{cases} \\ \begin{cases} a<1 \\ x<1 \\ a<-x-1 \end{cases} \end{array}\right.$$



(2) $a \geqslant (x-2)^2-2$





$A: \begin{cases} a=(x-2)^2-2 \\ a=-x+5 \end{cases}$

$x^2-4x+2+x-5=0$

$x^2-3x-3=0$

$x=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$

$a=5-\frac{3+\sqrt{21}}{2}=\frac{7-\sqrt{21}}{2}$

$A\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2};\ \frac{7-\sqrt{21}}{2}\right)$

$a=\frac{7-\sqrt{21}}{2}$

$B: \begin{cases} a=(x-2)^2-2 \\ a=x-3 \end{cases}$

$x^2-4x+2-x+3=0$

$x^2-5x+5=0$

$x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$

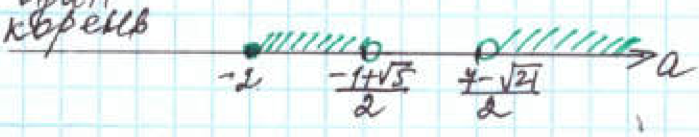
$a=\frac{5+\sqrt{5}}{2}-3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$B\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

$a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$C(2;-2)$

Хотя бы один корень



$a\in\left[-2;\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{7-\sqrt{21}}{2};+\infty\right)$

<u>Ответ:</u> $\left[-2;\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{7-\sqrt{21}}{2};+\infty\right)$

$\boxed{18.4.}$ ДЗ 3)

a – ? хотя бы один корень на $[-3;-2]$

$$\begin{cases} ax-4\geqslant 0 \\ a+\sqrt{4x+17}\geqslant 0 \\ a-1<x \end{cases}$$

(1) $ax-4\geqslant 0$

$ax\geqslant 4$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0 \\ a\geqslant \frac{4}{x} \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ a\leq \frac{4}{x} \end{cases} \end{array}\right.$$

(2) $a+\sqrt{4x+17}\geqslant 0$

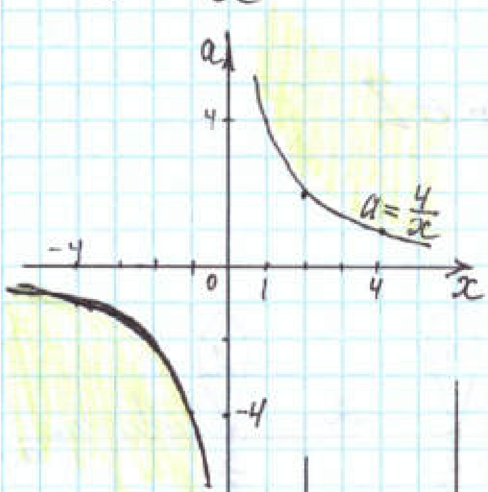
$a\geqslant -\sqrt{4x+17}$

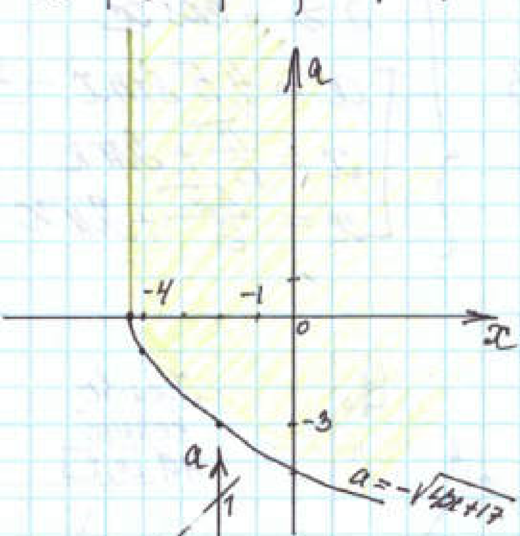
$x\geqslant -4\frac{1}{4}$

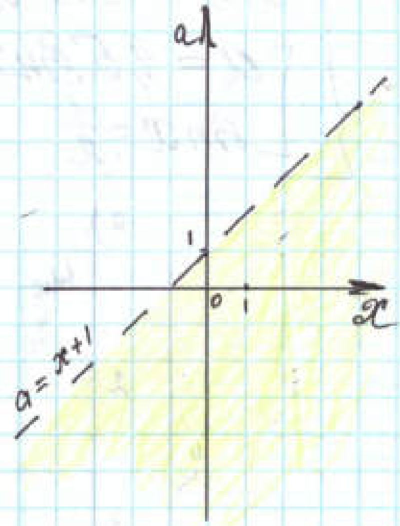
x	$-4\frac{1}{4}$	-4	-3	-2	0
a	0	-1	$-\sqrt{5}$	-3	$-\sqrt{17}$

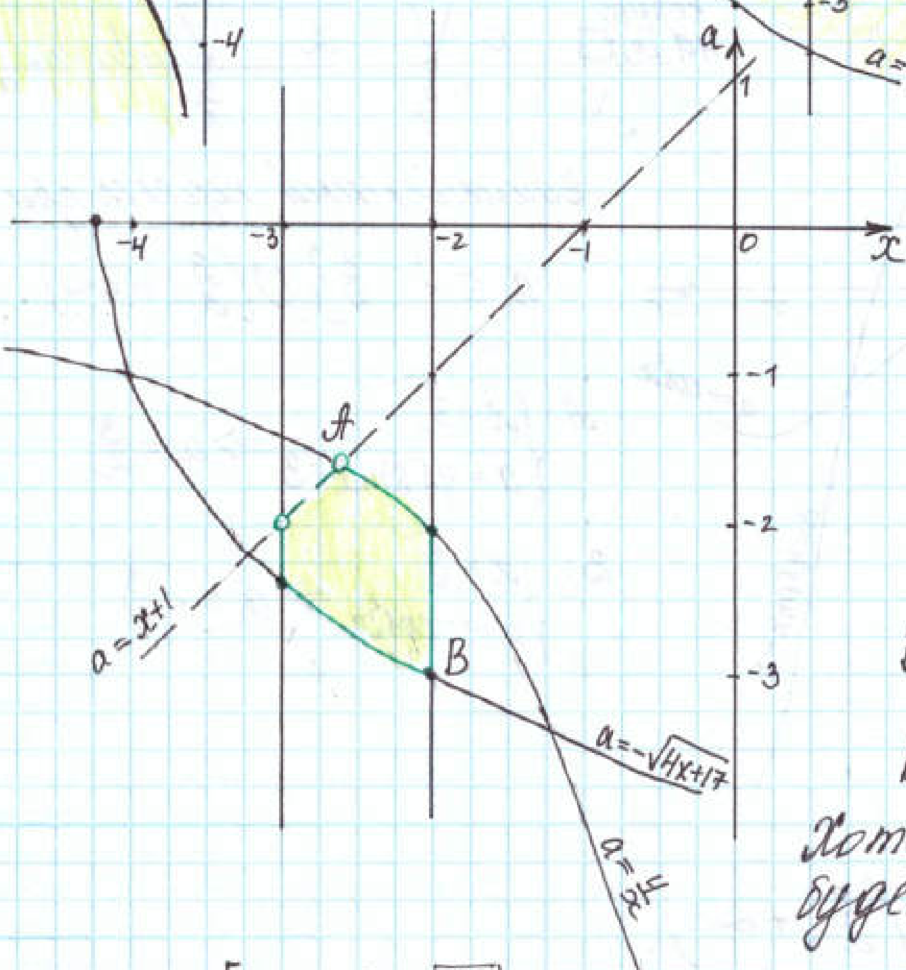
(3) $a-1<x$

$a<x+1$









$A:\ \begin{cases} a=\frac{4}{x} \\ a=x+1 \end{cases}$

$4=x^2+x$

$x^2+x-4=0$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2},\ x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$

$a=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}+1=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$

$A\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2};\ \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right);\ a=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$

$B:\ \begin{cases} x=-2 \\ a=-\sqrt{4x+17} \end{cases}$

$B(-2;-3)\quad a=-3$

Хотя бы одно решение будет при $a\in\left[-3;\ \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$

Ответ: $\left[-3;\ \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$

$\boxed{18.4.}$ ДЗ 4)

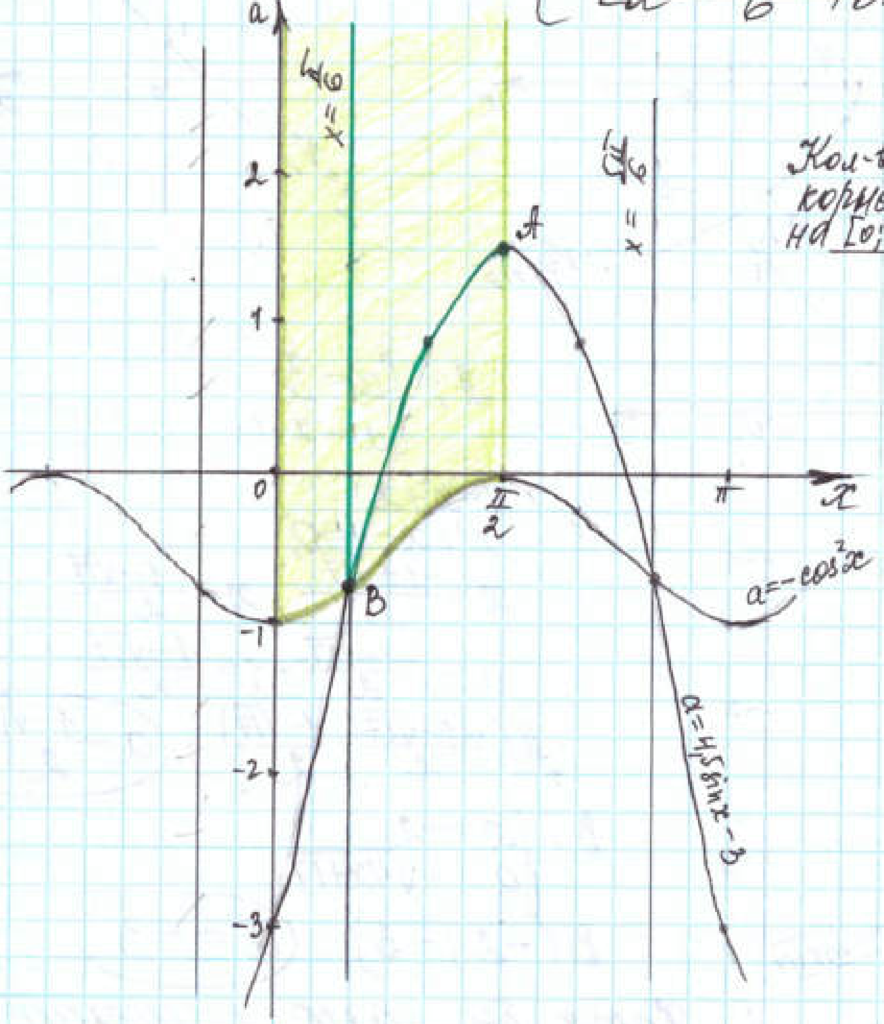
a – ? единств. корень на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

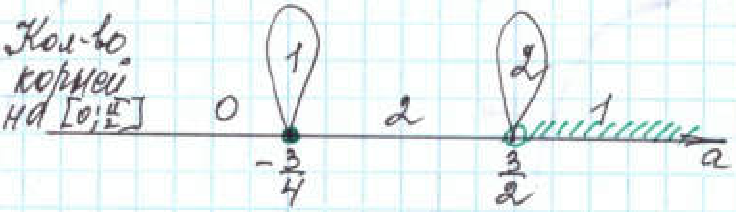
$$|\cos^2 x + 9\sin x - a - 6| = \cos^2 x + a.$$

$$\begin{cases} \cos^2 x + a \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} \cos^2 x + 9\sin x - a - 6 = \cos^2 x + a \\ \cos^2 x + 9\sin x - a - 6 = -\cos^2 x - a \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} a \geqslant -\cos^2 x \\ \left[\begin{array}{l} a = 4{,}5\sin x - 3 \\ 2\cos^2 x + 9\sin x - 6 = 0. \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geqslant -\cos^2 x \\ \left[\begin{array}{l} a = 4{,}5\sin x - 3 \\ 2\sin^2 x - 9\sin x + 4 = 0 \end{array}\right. \end{cases} \quad \sin x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{4} = \frac{9 \pm 7}{4} \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = 4 \quad \varnothing \\ \sin x = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} a \geqslant -\cos^2 x \\ \left[\begin{array}{l} a = 4{,}5\sin x - 3 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} a \geqslant -\cos^2 x \\ \left[\begin{array}{l} a = 4{,}5\sin x - 3 \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right., k \in Z \end{cases}$$





Единственный корень при

$$a \in \left\{-\frac{3}{4}\right\} \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

$$A: \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ a = 4{,}5\sin x - 3 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$B: \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ a = -\cos^2 x \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$$

<u>Ответ</u>: $\left\{-\frac{3}{4}\right\} \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

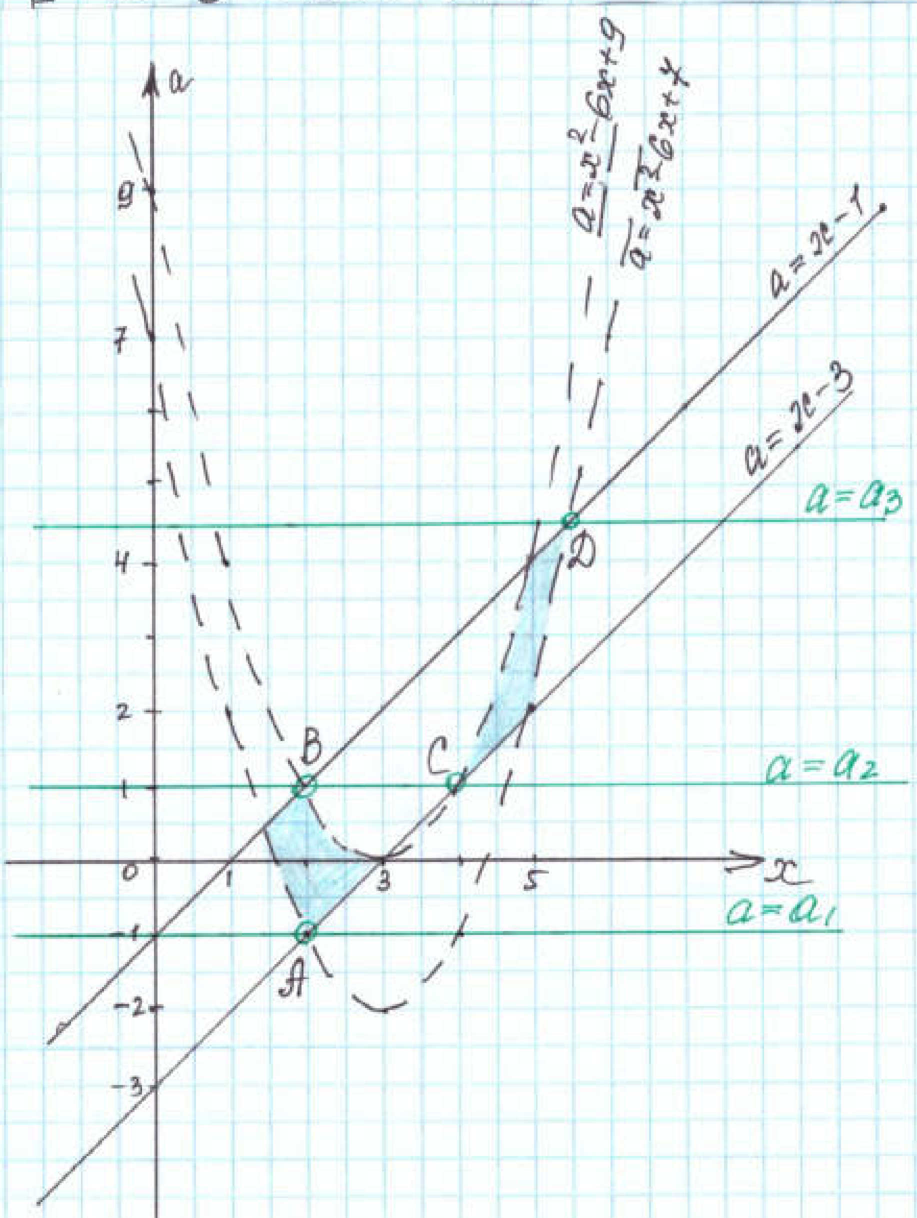
18.4. (23)

5) a – ? хотя бы одно решение на $[a+1;\, a+3]$

$|x^2-6x-a+8|<1.$

$$\begin{cases} -1 < x^2-6x-a+8 < 1 \\ a+1 \le x \le a+3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-6x+7 < a < x^2-6x+9 \\ x-3 \le a \le x-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)^2-2 < a < (x-3)^2 \\ x-3 \le a \le x-1 \end{cases}$$



Хотя бы одно решение будет, если $a \in (a_1; a_2) \cup (a_2; a_3)$

1) A: $x^2-6x+7 = x-3$

$x^2-7x+10=0$

$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=5 \end{array}\right. \qquad x=2$

$a_1 = 2-3 = -1$, $\boxed{a_1=-1}$

$A(2;-1)$

2) B: $x^2-6x+9 = x-1$

$x^2-7x+10=0$

$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=5 \end{array}\right.$

$B(2;1)$, $C(4;1)$

$\boxed{a_2=1}$

3) D: $x^2-6x+7 = x-1$

$x^2-7x+8=0$

$x = \frac{7 \pm \sqrt{49-32}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{2}$

$a_3 = \frac{7+\sqrt{17}}{2} - 1 = \boxed{\frac{5+\sqrt{17}}{2}}$

$a \in (-1;1) \cup \left(1; \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)$

<u>Ответ</u>: $(-1;1) \cup \left(1; \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)$

Задание №18.4 (ДЗ). Ответы.

1) $(-\infty;\ -2];\ [-\sqrt{3};\ -1);\ 0;\ (1;\ \sqrt{3}];\ [2;\ +\infty)$.

2) $\left[-2;\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right);\ \left(\dfrac{7-\sqrt{21}}{2};\ +\infty\right)$.

3) $\left[-3;\ \dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$.

4) $-0,75;\ (1,5;\ +\infty)$.

5) $(-1;\ 1);\ \left(1;\ \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\right)$.

Задание №18.5. Графические решения. Плоскость XOY (часть 1).

1) (ЕГЭ-2019)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = x - 2|x| + |x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a|$$

больше -4 ?

2) (ЕГЭ-2018)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ((x+5)^2 + y^2 - a^2)\ln(9 - x^2 - y^2) = 0, \\ ((x+5)^2 + y^2 - a^2)(x + y + 5 - a) = 0 \end{cases}$$

имеет два различных решения.

3) (ЕГЭ-2016)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2 - 3xy - 3y + 9}{\sqrt{x+3}} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

4) (ЕГЭ-2016)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x-3)(y + 3x - 9) = |x-3|^3, \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

5) (ЕГЭ-2015)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2 = |x^2 + y^2 - 1|, \\ y = a(x-1) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

$\boxed{18.5.}$ 1) ЕГЭ – 2019

a – ? наименьшее значение функции

$f(x) = x - 2|x| + |x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a|$

больше -4.

Если наименьшее значение функции больше -4, то $f(x) > -4$ должно выполняться $\forall x \in R$.

$f(x) > -4$

$x - 2|x| + |x^2 - 2(a+1)x + a(a+2)| > -4$

$|x^2 - 2(a+1)x + a(a+2)| > 2|x| - x - 4.$

Пусть $x^2 - 2(a+1)x + a(a+2) = g(x)$, тогда

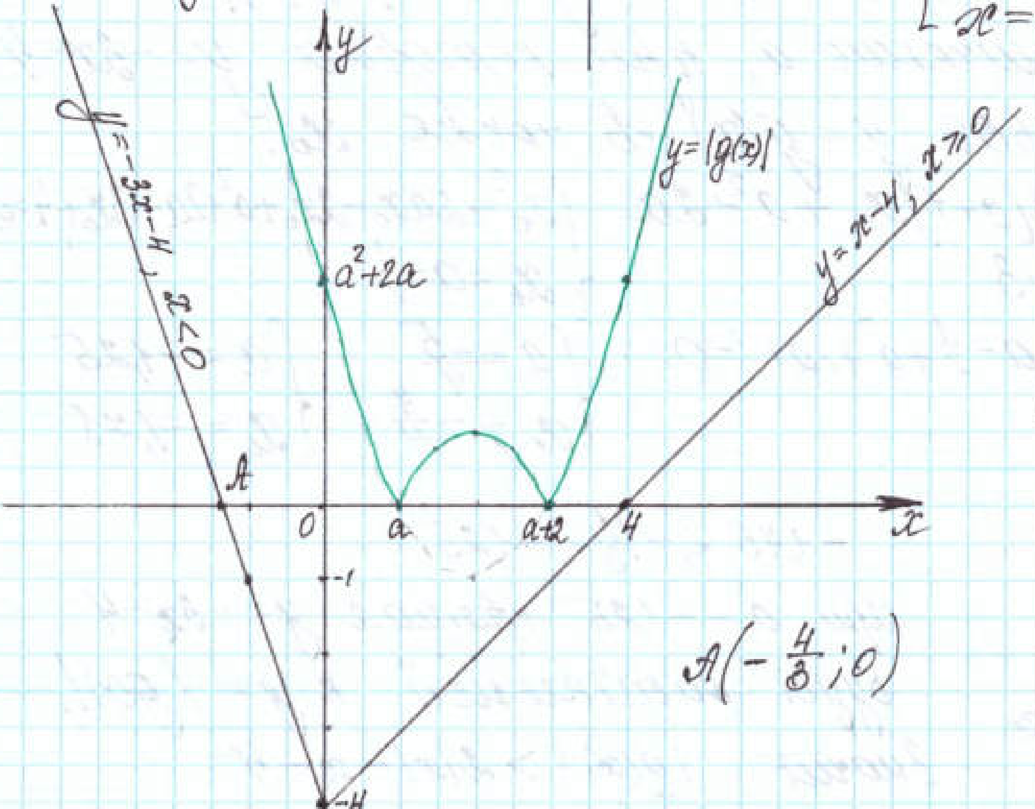
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ |g(x)| > x - 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ |g(x)| > -3x - 4. \end{cases} \end{array}\right.$$

$y = x - 4$ график – прямая

$y = -3x - 4$ график – прямая

$y = g(x)$ график – парабола ветви вверх

$\left[\begin{array}{l} x = a \\ x = a + 2 \end{array}\right.$



$A\left(-\frac{4}{3}; 0\right)$

График $y = |g(x)|$ подвижен, он будет сдвигаться вдоль оси Ox в зависимости от значений a.

Найдем то значение a, при котором прямая $y = x-4$ будет касаться $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0.

$$\begin{cases} y(x_0) = g(x_0) \\ g'(x_0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 - 4 = x_0^2 - 2(a+1)x_0 + a^2 + 2a \\ 2x_0 - 2(a+1) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0^2 - 2ax_0 - 2x_0 - x_0 + a^2 + 2a + 4 = 0 \\ x_0 = a + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 3a + \frac{9}{4} - 2a\left(a + \frac{3}{2}\right) - 3\left(a + \frac{3}{2}\right) + a^2 + 2a + 4 = 0 \\ x_0 = a + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^2 + 5a + \frac{9}{4} + 4 - 2a^2 - 3a - 3a - \frac{9}{2} = 0 \\ x_0 = a + \frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{7}{4} \\ x_0 = \frac{13}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1{,}75 \\ x_0 = 3{,}25 \end{cases}$$

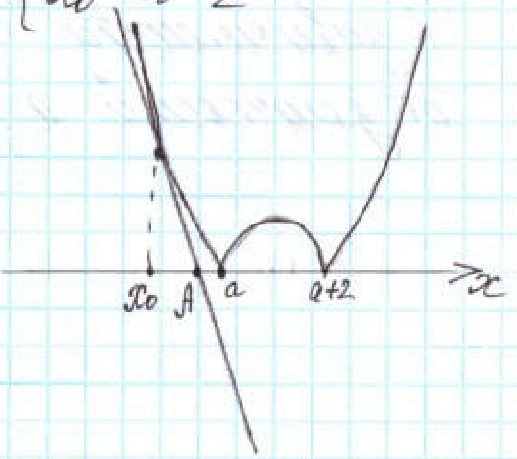
$a + 2 = 3{,}75$; $a < x_0 < a+2 \Rightarrow a + 2 < 4$, $a < 2$

Прямая $y = x - 4$ будет касательной для $g(x)$, но не будет касательной для $|g(x)|$.

Найдем то значение a, при котором $y = -3x - 4$ будет касаться $y = g(x)$ в точке x_0.

$$\begin{cases} -3x_0 - 4 = x_0^2 - 2(a+1)x_0 + a^2 + 2a \\ 2x_0 - 2(a+1) = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_0^2 - 2ax_0 - 2x_0 + a^2 + 2a + 3x_0 + 4 = 0 \\ x_0 = a - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - a + \frac{1}{4} - 2a^2 + a + a - \frac{1}{2} + a^2 + 2a + 4 = 0 \\ x_0 = a - \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} a = -\frac{5}{4} \\ x_0 = -\frac{7}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1{,}25 \\ x_0 = -1{,}75 \end{cases}$$



$-1{,}75 < -1\frac{1}{3} < -1{,}25$

При $a = -1{,}25$ прямая $y = -3x - 4$ будет касательной к $y = |g(x)|$.

Значит $|g(x)| > 2|x| - x - 4$ при $a \in (-1{,}25; 2)$.

<u>**Ответ:**</u> $(-1{,}25; 2)$

$\boxed{18.5.}$ 2) ЕГЭ - 2018

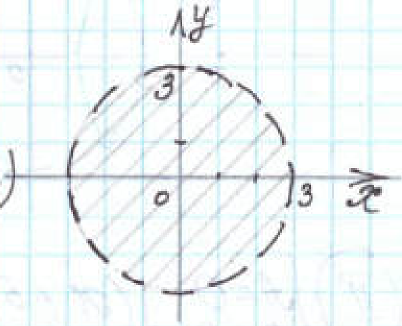
a - ? 2 различных решения

$$\begin{cases} ((x+5)^2+y^2-a^2)\cdot\ln(9-x^2-y^2)=0 \\ ((x+5)^2+y^2-a^2)\cdot(x+y+5-a)=0 \end{cases}$$

ОДЗ: $9-x^2-y^2>0$ внутренняя часть круга (без границы)

$x^2+y^2<9$

$(0;0)$ - центр, $R=3$



Пусть $A=(x+5)^2+y^2-a^2$

$B=\ln(9-x^2-y^2)$

$C=x+y+5-a$

1. $A=0$; $(x+5)^2+y^2=a^2$. Окружность; $(-5;0)$ - центр $R=|a|$

2. $B=0$; $\ln(9-x^2-y^2)=0$

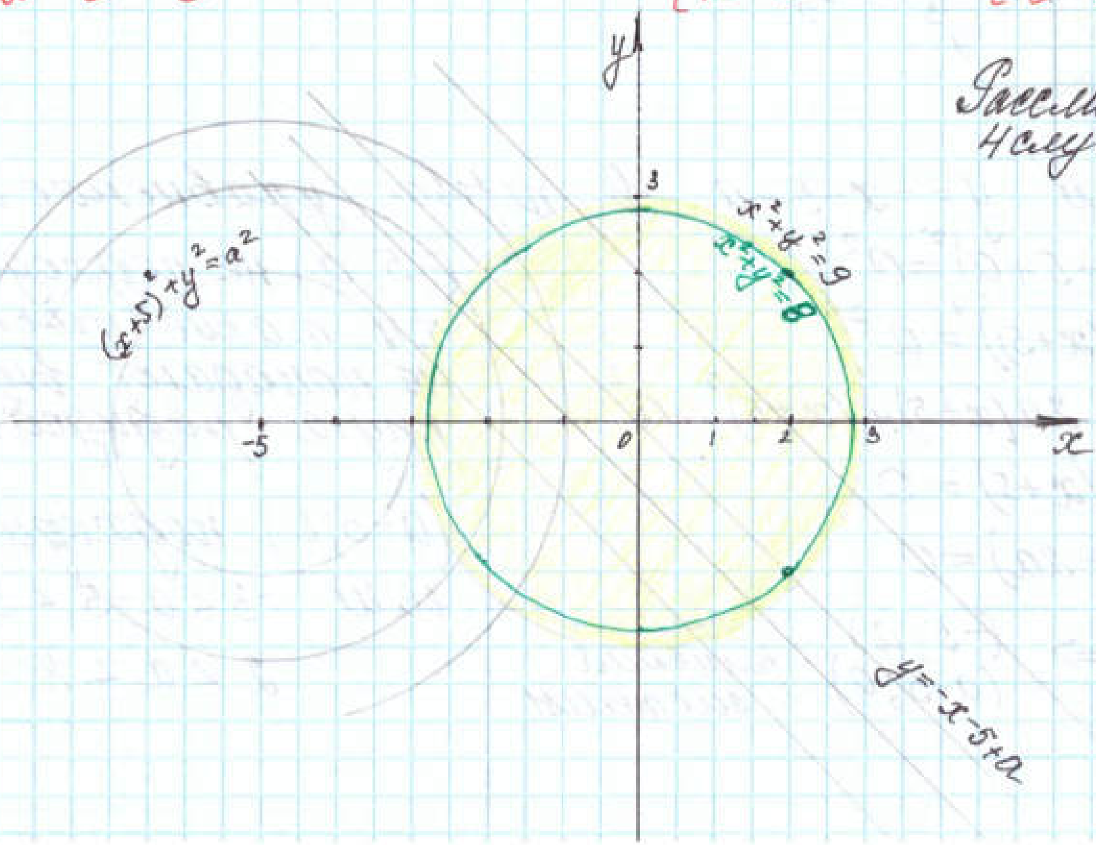
$9-x^2-y^2=1$

$x^2+y^2=8$. Окружность; $(0;0)$ - центр $R=2\sqrt{2}$

3. $C=0$; $x+y+5-a=0$

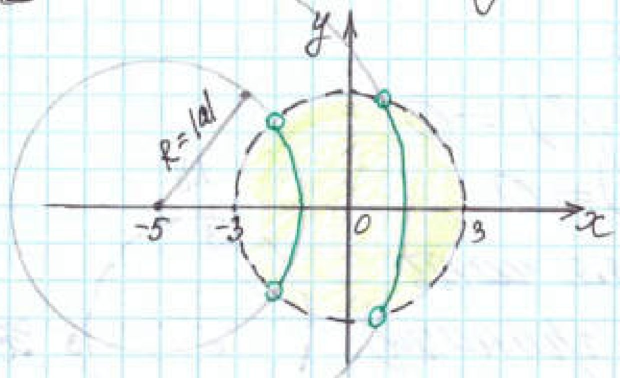
$y=-x-5+a$. Прямая; $k=-1$; $(0;a-5)$.

$$\begin{cases} A\cdot B=0 \\ A\cdot C=0 \end{cases} \Leftrightarrow A=0 \text{ или } \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} A=0 \\ C=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} B=0 \\ C=0 \end{cases}$$



Рассмотрим эти 4 случая отдельно.

(I) $A=0$; $(x+5)^2+y^2=a^2$.

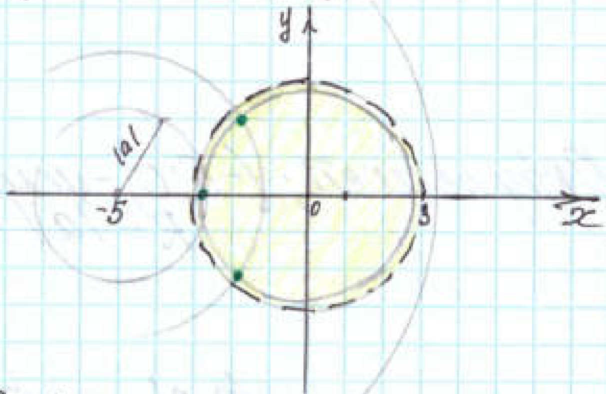


В этом случае:

а) нет решений при $\left[\begin{array}{l}|a|\le 2\\ |a|\ge 8\end{array}\right.$

б) бесконечно много решений при $2<|a|<8$.

(II) $\begin{cases}A=0\\ B=0\end{cases}$ $\begin{cases}(x+5)^2+y^2=a^2\\ x^2+y^2=8\end{cases}$



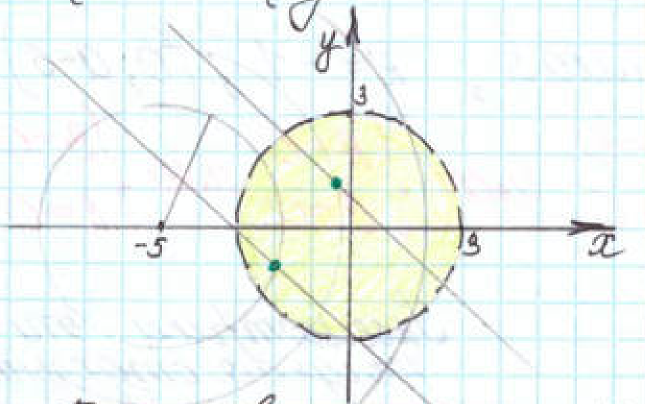
В этом случае:

а) нет решений при $\left[\begin{array}{l}|a|<5-2\sqrt2\\ |a|>5+2\sqrt2\end{array}\right.$

б) одно решение при $|a|=5\pm2\sqrt2$

в) два различных решения при $5-2\sqrt2<|a|<5+2\sqrt2$.

(III) $\begin{cases}A=0\\ C=0\end{cases}$ $\begin{cases}(x+5)^2+y^2=a^2\\ y=-x-5+a\end{cases}$



В этом случае:

а) нет решений при $\left[\begin{array}{l}a\le 2\\ a\ge 8\end{array}\right.$

б) одно решение при $2<a<8$

Подставим $y=-x-5+a$ в первое уравнение системы.

$(x+5)^2+(-x-5+a)^2=a^2$

$(x+5)^2+(a-(x+5))^2=a^2$

$(x+5)^2+a^2-2a(x+5)+(x+5)^2=a^2$

$2(x+5)^2-2a(x+5)=0$

$(x+5)(x+5-a)=0$

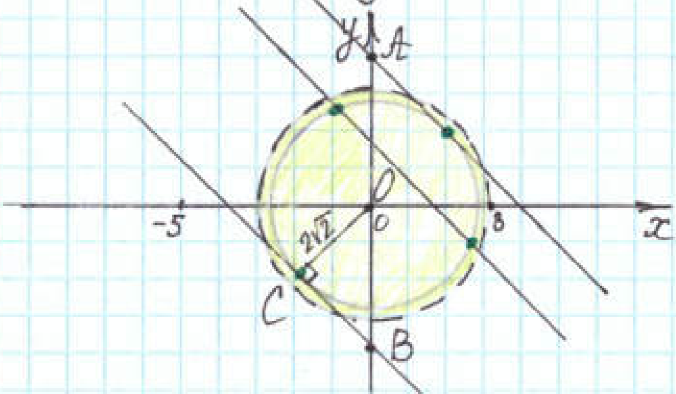
$\left[\begin{array}{l}x=-5\\ x=a-5\end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l}(-5;a)\\ (a-5;0)\end{array}$ – решения системы

$(-5;a)$ не подходит, т.к. такие точки не попадают внутрь круга радиуса 3.

$(a-5;0)$ подходит, если $-3<a-5<3$

$2<a<8$

IV $\begin{cases} B=0 \\ C=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ y=-x-5+a \end{cases}$



В этом случае:

а) нет решений при $\left[\begin{array}{l} a<1 \\ a>9 \end{array}\right.$

б) одно решение при $\left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=9 \end{array}\right.$

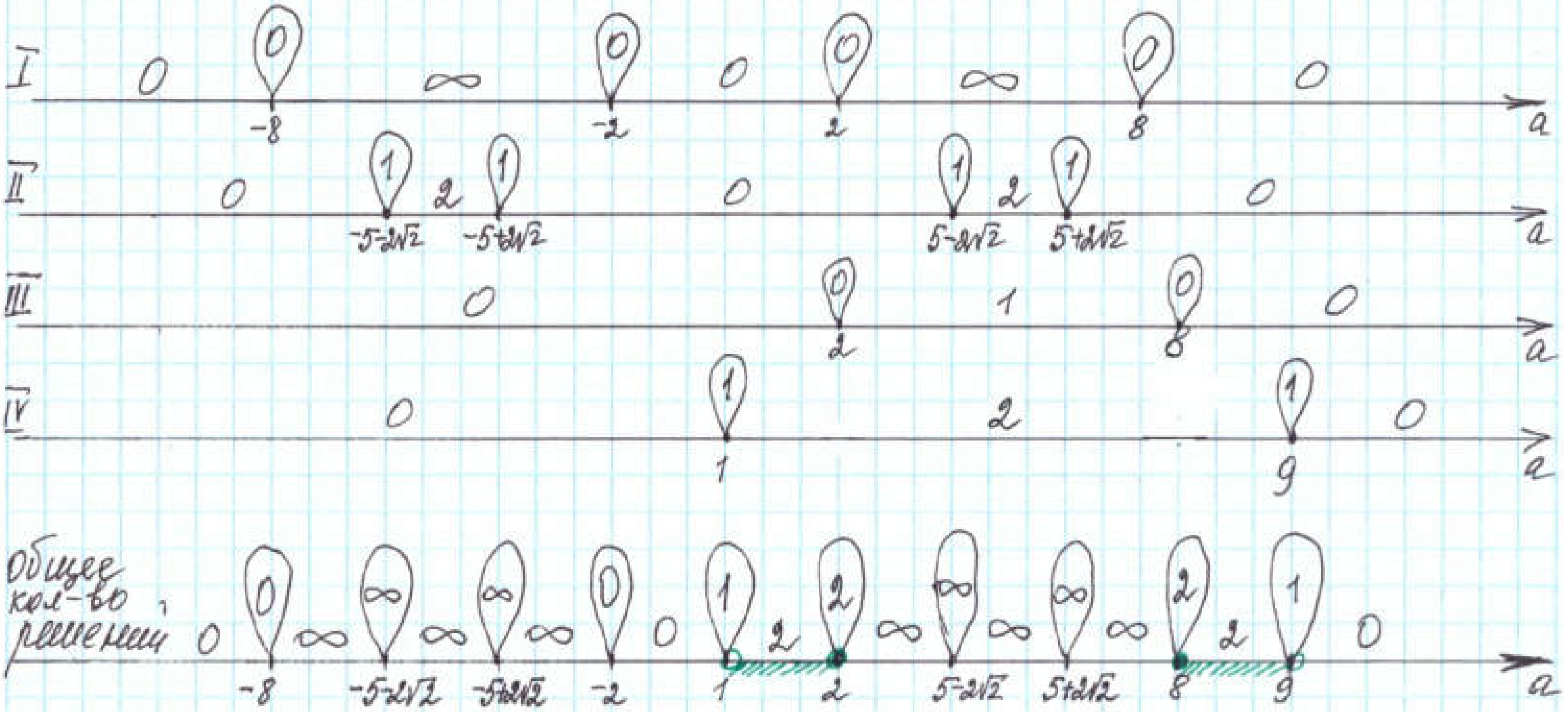
в) два решения при $1<a<9$

ΔOBC: $\angle C=90^\circ$, $OC=2\sqrt{2}$; $\angle COB=45^\circ$ $\Rightarrow OB=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=4$.

$B(0;-4)$; $y=-x-5+a$; $-4=0-5+a$, $a=1$

$A(0;4)$; $y=-x-5+a$; $4=0-5+a$, $a=9$.

Объединяем все случаи вместе.



$a\in(1;2]\cup[8;9)$.

Ответ: $(1;2]\cup[8;9)$.

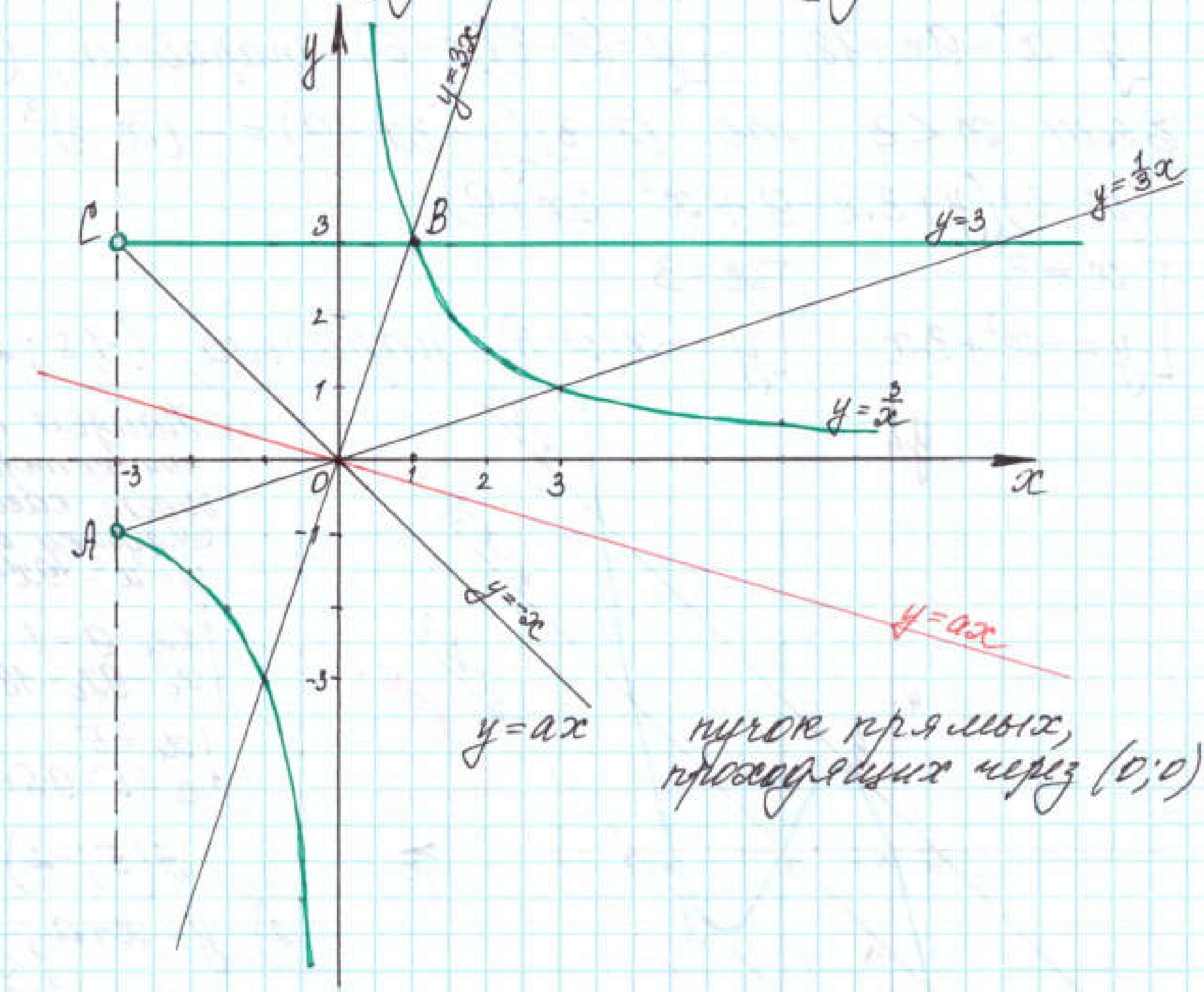
$\boxed{18.5.}$ 3) ЕГЭ - 2016

a - ? ровно 2 различных решения

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2-3xy-3y+9}{\sqrt{x+3}}=0 \\ y=ax \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy(y-3)-3(y-3)=0 \\ x+3>0 \\ y=ax \end{cases} \quad \begin{cases} (xy-3)(y-3)=0 \\ x>-3 \\ y=ax \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} xy-3=0 \\ y-3=0 \end{array}\right. \\ x>-3 \\ y=ax \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{3}{x} \\ y=3 \end{array}\right. \\ x>-3 \\ y=ax \end{cases}$$

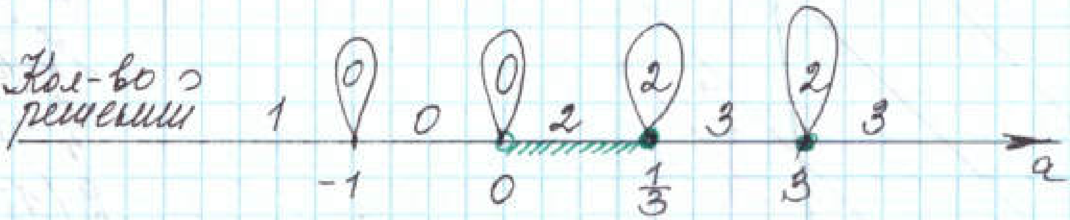


$A(-3;-1)$
$y=ax$
$-1=a\cdot(-3)$
$\underline{a=\frac{1}{3}}$

$B(1;3)$
$3=1\cdot a$
$\underline{a=3}$

$C(-3;3)$
$3=a\cdot(-3)$
$\underline{a=-1}$

$y=ax$ пучок прямых, проходящих через $(0;0)$.



Ровно 2 решения при $a\in(0;\frac{1}{3}]\cup\{3\}$

<u>Ответ:</u> $(0;\frac{1}{3}]\cup\{3\}$.

18.5. 4) ЕГЭ - 2016

a - ? ровно 4 различных решения

$$\begin{cases}(x-3)(y+3x-9)=|x-3|^3\\ y=x+a\end{cases}$$

Если $x \geq 3$, то $(x-3)(y+3x-9)=(x-3)^3$,

$(x-3)(y+3x-9-(x-3)^2)=0$

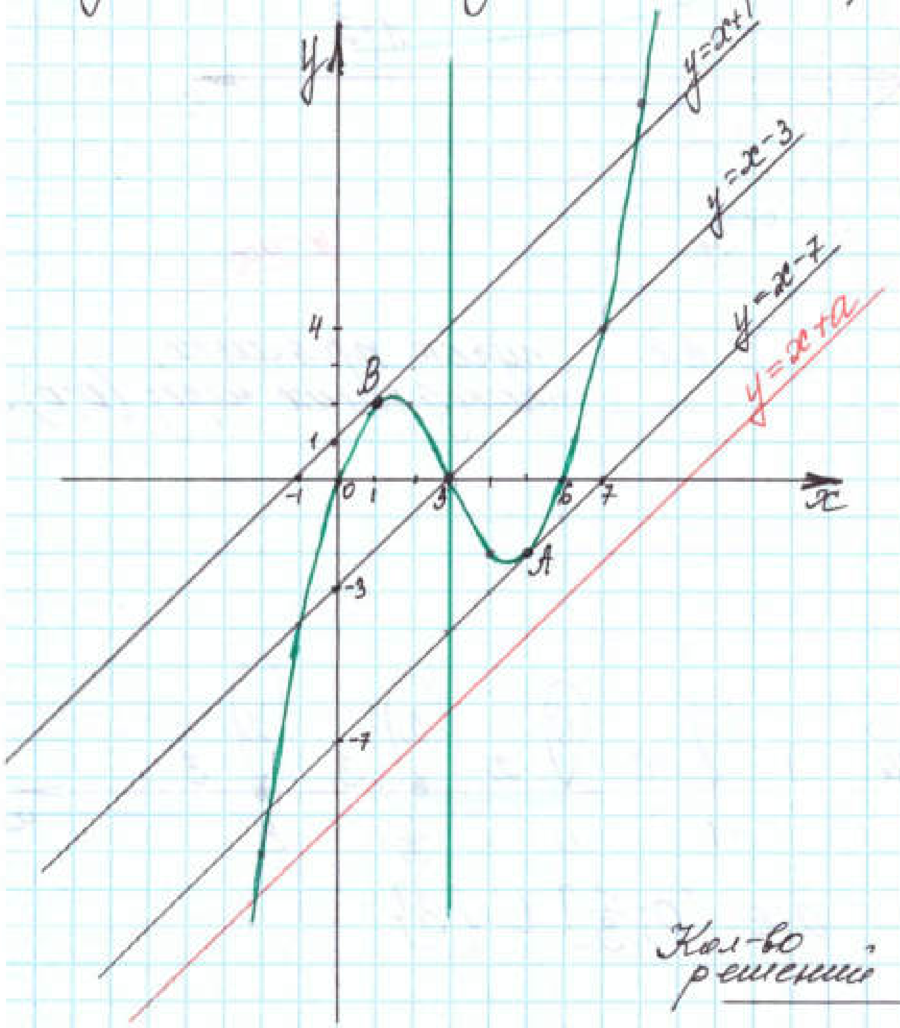
$(x-3)(y+3x-9-x^2+6x-9)=0.$

$\left[\begin{array}{l}x=3\\ y=x^2-9x+18\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=3\\ y=(x-3)(x-6)\end{array}\right.$ - парабола, $(4,5;-2,25)$ верш.

Если $x<3$, то $(x-3)(y+3x-9)=-(x-3)^3$

$(x-3)(y+3x-9+x^2-6x+9)$

$\left[\begin{array}{l}x=3\\ y=-x^2+3x\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=3\\ y=-x(x-3)\end{array}\right.$ - парабола, $(1,5;2,25)$ верш.



1) Найдем то значение a, при котором $y=x+a$ будет касательной к графику функции $y=x^2-9x+18$ в точке x_0.

$$\begin{cases}2x_0-9=1\\ x_0^2-9x_0+18=x_0+a\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_0=5\\ a=5^2-9\cdot5+18-5;\ a=-7\end{cases}$$

$A(5;-2)$

2) $y=x+a$; $y=-x^2+3x$.

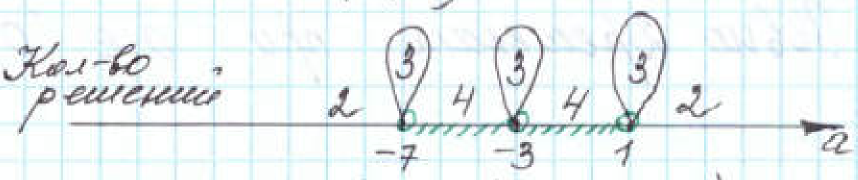
$x+a=-x^2+3x$

$x^2-2x+a=0$

1 корень, если $D=0$.

$\frac{D}{4}=1-a$; $1-a=0$, $a=1$

$B(1;2)$



$a \in (-7;-3) \cup (-3;1)$

Ответ: $(-7;-3) \cup (-3;1)$

$\boxed{18.5.}$ 5) ЕГЭ – 2015

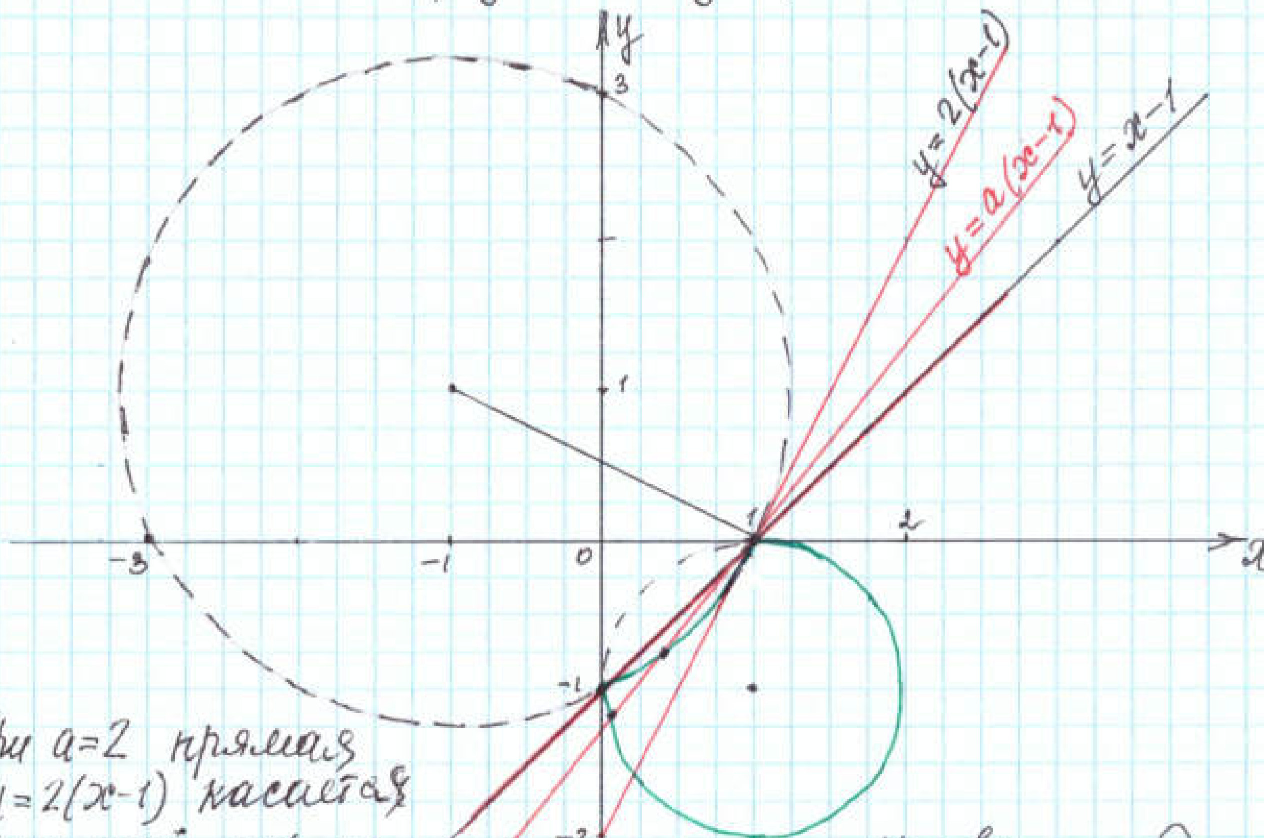
a – ? более двух решений

$$\begin{cases} 2x-2y-2=|x^2+y^2-1| \\ y=a(x-1) \end{cases}$$

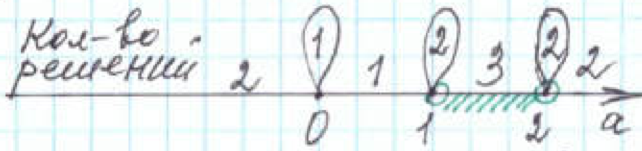
1) $$\begin{cases} 2x-2y-2\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2-1=2x-2y-2 \\ x^2+y^2-1=-2x+2y+2 \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} y\leq x-1 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-2x+y^2+2y=-1 \\ x^2+2x+y^2-2y=3 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y\leq x-1 & \text{полуплоскость} \\ \left[\begin{array}{ll} (x-1)^2+(y+1)^2=1 & \text{окружность, } (1;-1)\text{ - центр, } r=1 \\ (x+1)^2+(y-1)^2=5 & \text{окружность, } (-1;1)\text{ - центр, } R=\sqrt{5} \end{array}\right. \end{cases}$$

(2) $y=a(x-1)$ пучок прямых, проходящих через точку $(1;0)$.



При $a=2$ прямая $y=2(x-1)$ касается большой окр-ти



Более двух решений при $a\in(1;2)$.

Ответ: $(1;2)$.

Задание №18.5. Ответы.

1) $(-1,25;\ 2)$.

2) $(1;\ 2];\ [8;\ 9)$.

3) $\left(0;\ \dfrac{1}{3}\right];\ \{3\}$.

4) $(-7;\ -3);\ (-3;\ 1)$.

5) $(1;\ 2)$.

Задание №18.5 (ДЗ). Графические решения. Плоскость XOY (часть 1).

1) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наибольшее значение функции

$$f(x) = x(2a - x) + ||2x - 14| - 4| + 4 - a^2$$

не больше 6 ?

2) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (4x - 3y - a + 36)(\log_3(10x - x^2 - (y-5)^2) - 2) = 0, \\ (4x - 3y - a + 36)(x^2 + (y-5)^2 - a) = 0 \end{cases}$$

имеет два различных решения.

3) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (xy^2 - 2xy - 6y + 12)\sqrt{6 - x} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

4) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (y - 1)(x + 3y - 1) = |y - 1|^3, \\ y + 3 = a - x \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

5) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 + 4y = 4|2x - y|, \\ x + 2y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

$\boxed{18.5.}$ 1) ЕГЭ – 2019

a – ? наименьшее значение функции

$f(x) = x - 2|x| + |x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a|$

больше -4.

Если наименьшее значение функции больше -4, то $f(x) > -4$ должно выполняться $\forall x \in R$.

$f(x) > -4$

$x - 2|x| + |x^2 - 2(a+1)x + a(a+2)| > -4$

$|x^2 - 2(a+1)x + a(a+2)| > 2|x| - x - 4.$

Пусть $x^2 - 2(a+1)x + a(a+2) = g(x)$, тогда

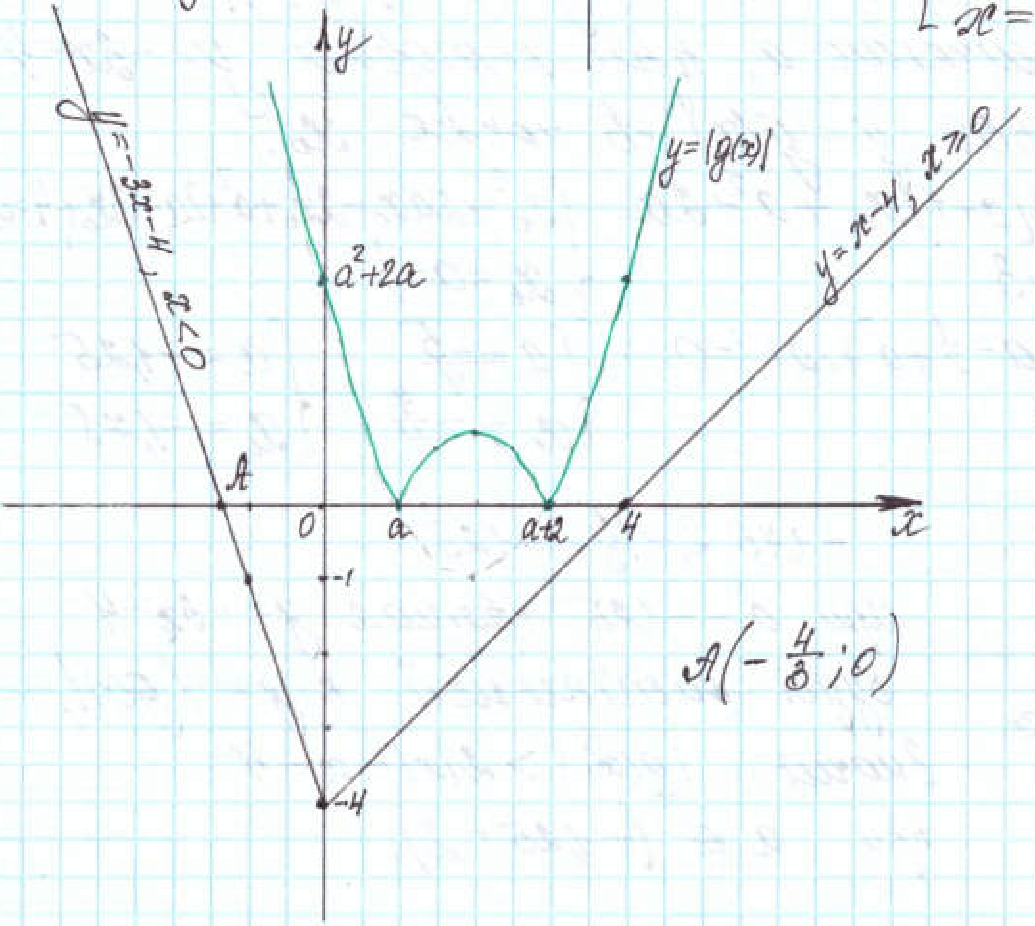
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ |g(x)| > x - 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ |g(x)| > -3x - 4. \end{cases} \end{array}\right.$$

$y = x - 4$ график – прямая

$y = -3x - 4$ график – прямая

$y = g(x)$ график – парабола ветви вверх

$\left[\begin{array}{l} x = a \\ x = a+2 \end{array}\right.$



$A\left(-\frac{4}{3}; 0\right)$

График $y = |g(x)|$ подвижен, он будет сдвигаться вдоль оси Ox в зависимости от значений a.

Найдем то значение a, при котором прямая $y = x-4$ будет касаться $y = g(x)$ в точке с абсциссой x_0.

$$\begin{cases} y(x_0) = g(x_0) \\ g'(x_0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 - 4 = x_0^2 - 2(a+1)x_0 + a^2 + 2a \\ 2x_0 - 2(a+1) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0^2 - 2ax_0 - 2x_0 - x_0 + a^2 + 2a + 4 = 0 \\ x_0 = a + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 3a + \frac{9}{4} - 2a(a+\frac{3}{2}) - 3(a+\frac{3}{2}) + a^2 + 2a + 4 = 0 \\ x_0 = a + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^2 + 5a + \frac{9}{4} + 4 - 2a^2 - 3a - 3a - \frac{9}{2} = 0 \\ x_0 = a + \frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{7}{4} \\ x_0 = \frac{13}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1{,}75 \\ x_0 = 3{,}25 \end{cases}$$

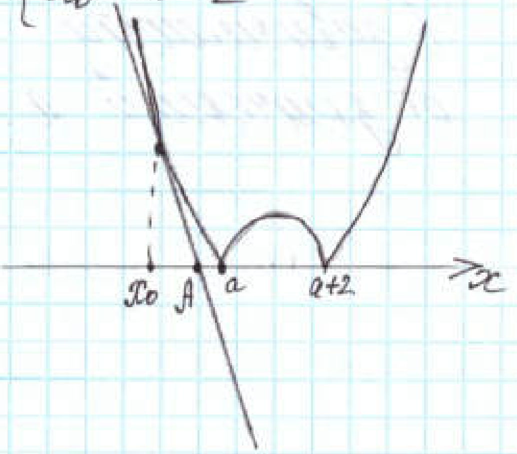
$a+2 = 3{,}75$; $a < x_0 < a+2 \Rightarrow a+2 < 4$, $a < 2$

Прямая $y = x-4$ будет касательной для $g(x)$, но не будет касательной для $|g(x)|$.

Найдем то значение a, при котором $y = -3x-4$ будет касаться $y = g(x)$ в точке x_0.

$$\begin{cases} -3x_0 - 4 = x_0^2 - 2(a+1)x_0 + a^2 + 2a \\ 2x_0 - 2(a+1) = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_0^2 - 2ax_0 - 2x_0 + a^2 + 2a + 3x_0 + 4 = 0 \\ x_0 = a - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - a + \frac{1}{4} - 2a^2 + a + a - \frac{1}{2} + a^2 + 2a + 4 = 0 \\ x_0 = a - \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} a = -\frac{5}{4} \\ x_0 = -\frac{7}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1{,}25 \\ x_0 = -1{,}75 \end{cases}$$



$-1{,}75 < -1\frac{1}{3} < -1{,}25$

При $a = -1{,}25$ прямая $y = -3x-4$ будет касательной к $y = |g(x)|$.

Значит $|g(x)| > 2|x| - x - 4$ при $a \in (-1{,}25; 2)$.

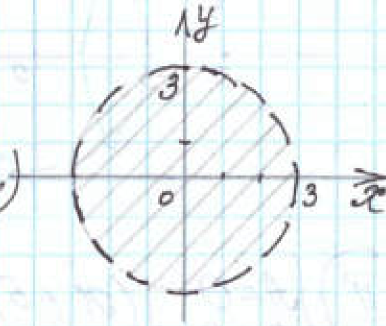
<u>**Ответ**</u>: $(-1{,}25; 2)$

$\boxed{18.5.}$ 2) ЕГЭ – 2018

a – ? 2 различных решения

$$\begin{cases}((x+5)^2+y^2-a^2)\cdot\ln(9-x^2-y^2)=0\\((x+5)^2+y^2-a^2)\cdot(x+y+5-a)=0\end{cases}$$

ОДЗ: $9-x^2-y^2>0$ Внутренняя часть
$x^2+y^2<9$ круга (без границы)
$(0;0)$ – центр, $R=3$



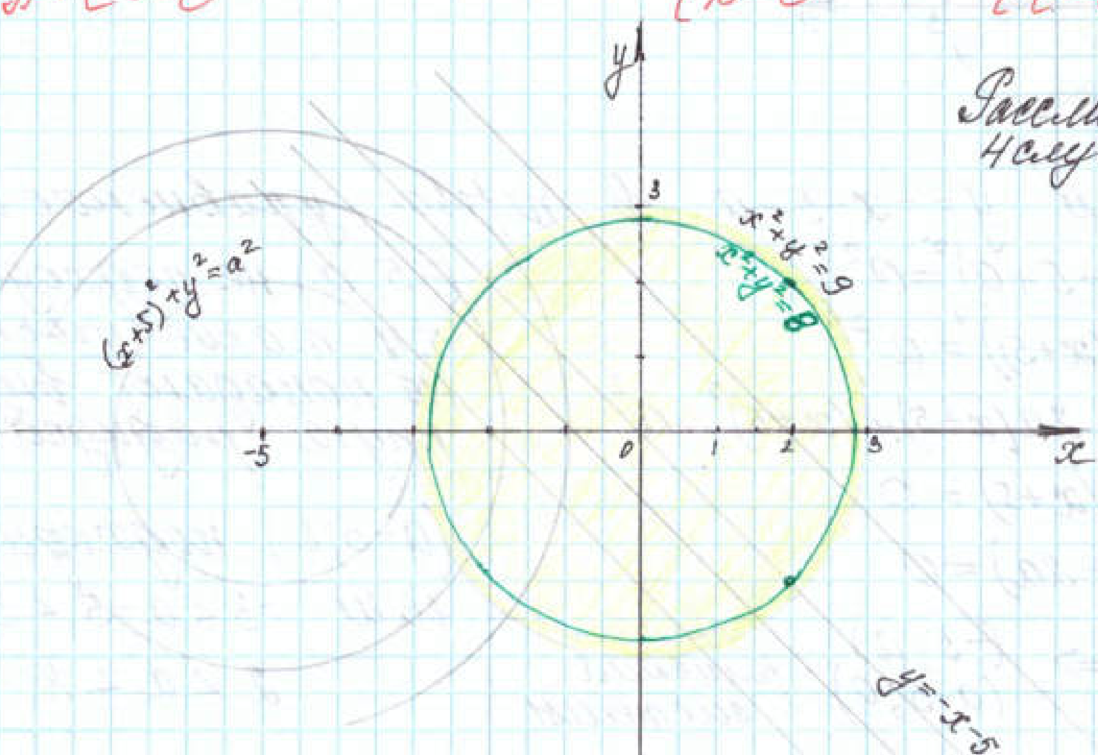
Пусть $A=(x+5)^2+y^2-a^2$
$B=\ln(9-x^2-y^2)$
$C=x+y+5-a$.

1. $A=0$; $(x+5)^2+y^2=a^2$. Окружность; $(-5;0)$ – центр, $R=|a|$

2. $B=0$; $\ln(9-x^2-y^2)=0$
$9-x^2-y^2=1$
$x^2+y^2=8$. Окружность; $(0;0)$ – центр, $R=2\sqrt{2}$

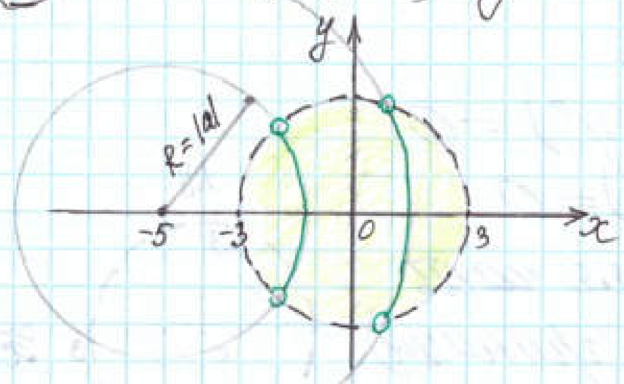
3. $C=0$; $x+y+5-a=0$
$y=-x-5+a$. Прямая; $k=-1$; $(0;a-5)$.

$$\begin{cases}A\cdot B=0\\A\cdot C=0\end{cases} \iff A=0 \text{ или } \begin{cases}A=0\\B=0\end{cases} \text{ или } \begin{cases}A=0\\C=0\end{cases} \text{ или } \begin{cases}B=0\\C=0\end{cases}$$



Рассмотрим эти 4 случая отдельно.

(I) $A=0$; $(x+5)^2+y^2=a^2$.

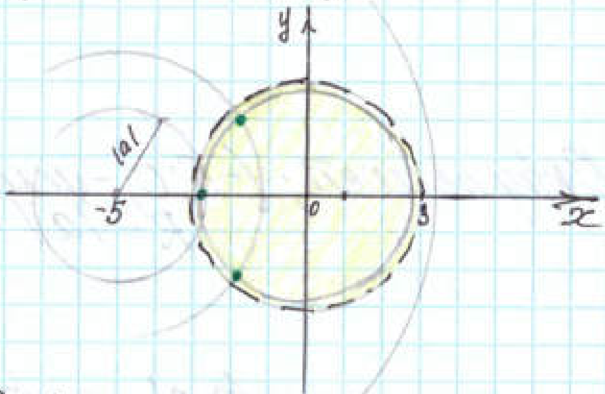


В этом случае:

а) нет решений при $\left[\begin{array}{l}|a|\le 2\\ |a|\ge 8\end{array}\right.$

б) бесконечно много решений при $2<|a|<8$.

(II) $\begin{cases}A=0\\ B=0\end{cases}$ $\begin{cases}(x+5)^2+y^2=a^2\\ x^2+y^2=8\end{cases}$



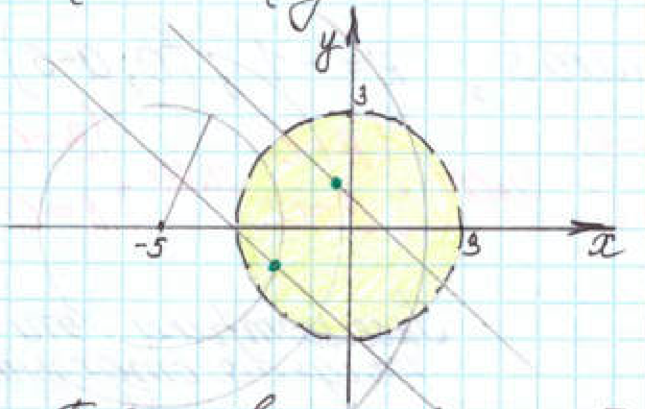
В этом случае:

а) нет решений при $\left[\begin{array}{l}|a|<5-2\sqrt{2}\\ |a|>5+2\sqrt{2}\end{array}\right.$

б) одно решение при $|a|=5\pm 2\sqrt{2}$

в) два различных решения при $5-2\sqrt{2}<|a|<5+2\sqrt{2}$.

(III) $\begin{cases}A=0\\ C=0\end{cases}$ $\begin{cases}(x+5)^2+y^2=a^2\\ y=-x-5+a\end{cases}$



В этом случае:

а) нет решений при $\left[\begin{array}{l}a\le 2\\ a\ge 8\end{array}\right.$

б) одно решение при $2<a<8$

Подставим $y=-x-5+a$ в первое уравнение системы.

$(x+5)^2+(-x-5+a)^2=a^2$

$(x+5)^2+(a-(x+5))^2=a^2$

$(x+5)^2+a^2-2a(x+5)+(x+5)^2=a^2$

$2(x+5)^2-2a(x+5)=0$

$(x+5)(x+5-a)=0$

$\left[\begin{array}{l}x=-5\\ x=a-5\end{array}\right. \Rightarrow$ $(-5;a)$, $(a-5;0)$ – решения системы

$(-5;a)$ не подходит, т.к. такие точки не попадают внутрь круга радиуса 3.

$(a-5;0)$ подходит, если $-3<a-5<3$

$2<a<8$

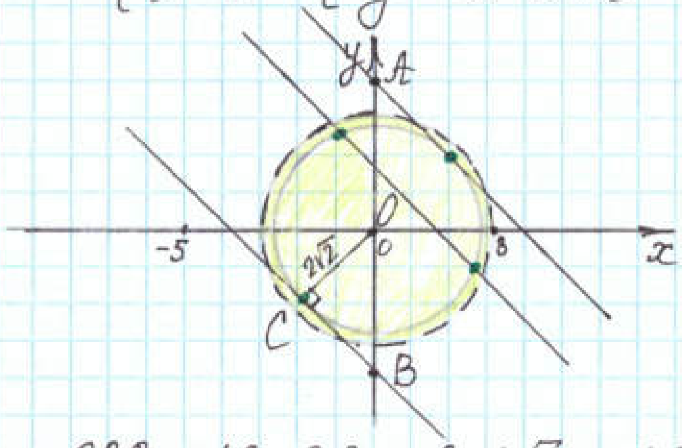
(IV) $\begin{cases} b=0 \\ c=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ y=-x-5+a \end{cases}$

В этом случае:

а) нет решений при $\left[\begin{array}{l} a<1 \\ a>9 \end{array}\right.$

б) одно решение при $\left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=9 \end{array}\right.$

в) два решения при $1<a<9$

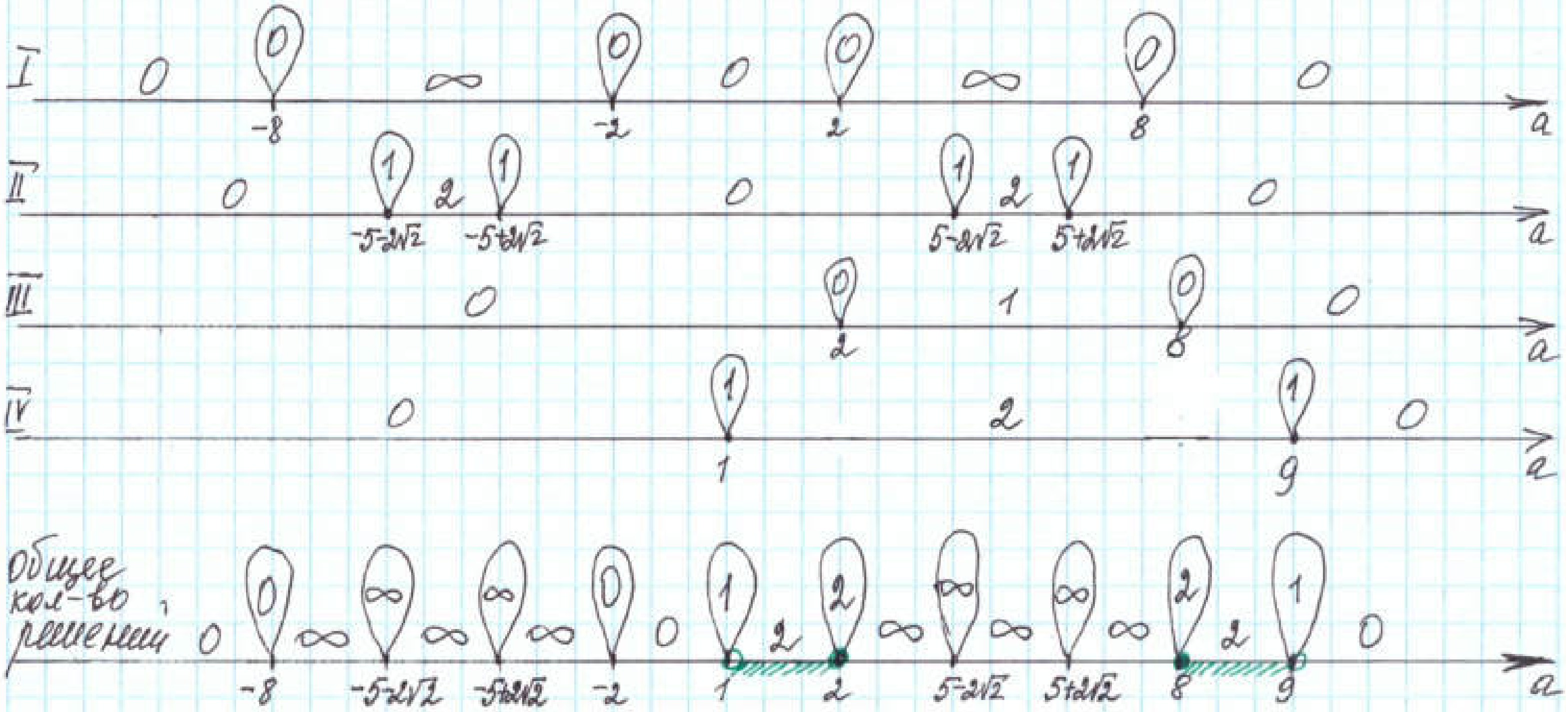


ΔOBC: $\angle C=90^\circ$, $OC=2\sqrt{2}$; $\angle COB=45^\circ$ $\Rightarrow$ $OB=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=4$.

$B(0;-4)$; $y=-x-5+a$; $-4=0-5+a$, $a=1$

$A(0;4)$; $y=-x-5+a$; $4=0-5+a$, $a=9$.

Объединяем все случаи вместе.



$a\in(1;2]\cup[8;9)$.

Ответ: $(1;2]\cup[8;9)$.

$\boxed{18.5.}$ 3) ЕГЭ – 2016

a – ? ровно 2 различных решения

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2-3xy-3y+9}{\sqrt{x+3}}=0 \\ y=ax \end{cases}$$

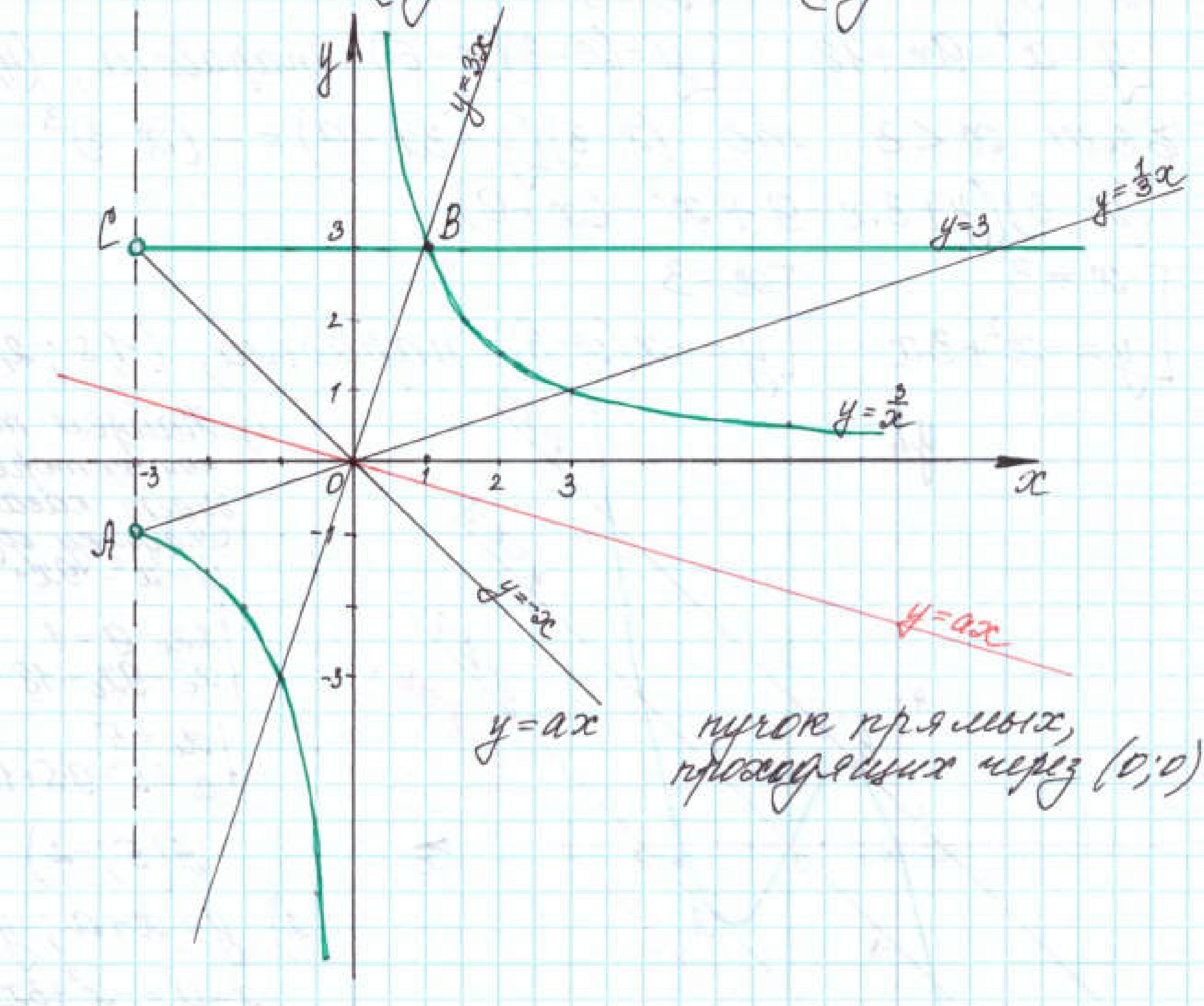
$$\begin{cases} xy(y-3)-3(y-3)=0 \\ x+3>0 \\ y=ax \end{cases} \quad \begin{cases} (xy-3)(y-3)=0 \\ x>-3 \\ y=ax \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} xy-3=0 \\ y-3=0 \end{array}\right. \\ x>-3 \\ y=ax \end{cases}$$

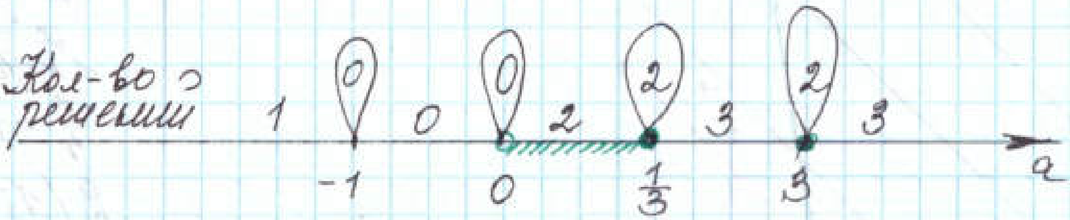
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=\frac{3}{x} \\ y=3 \end{array}\right. \\ x>-3 \\ y=ax \end{cases}$$

$A(-3;-1)$
$y=ax$
$-1=a\cdot(-3)$
$a=\frac{1}{3}$

$B(1;3)$
$3=1\cdot a$
$a=3$

$C(-3;3)$
$3=a\cdot(-3)$
$a=-1$





Ровно 2 решения при $a\in(0;\frac{1}{3}]\cup\{3\}$

<u>Ответ:</u> $(0;\frac{1}{3}]\cup\{3\}$.

18.5. 4) ЕГЭ - 2016

a - ? ровно 4 различных решения

$$\begin{cases}(x-3)(y+3x-9)=|x-3|^3\\ y=x+a\end{cases}$$

Если $x\geq 3$, то $(x-3)(y+3x-9)=(x-3)^3$,

$(x-3)(y+3x-9-(x-3)^2)=0$

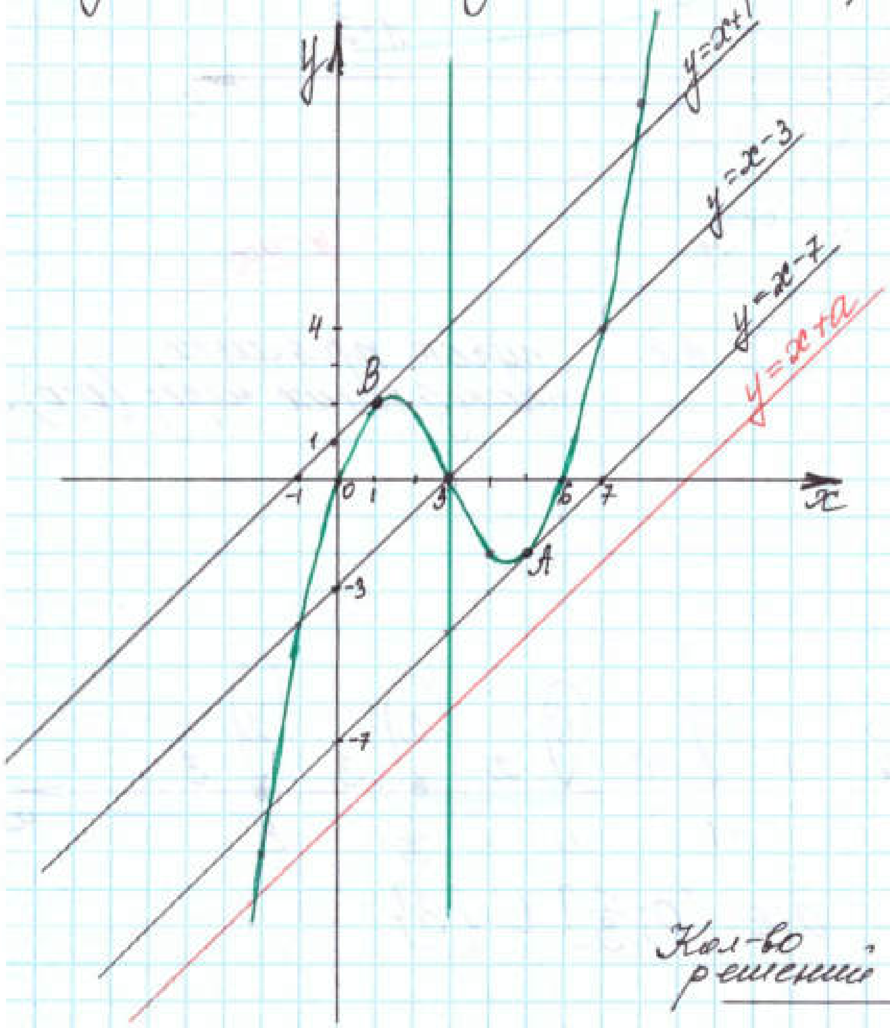
$(x-3)(y+3x-9-x^2+6x-9)=0.$

$$\left[\begin{array}{l}x=3\\ y=x^2-9x+18\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=3\\ y=(x-3)(x-6)\end{array}\right.$$ - парабола, $(4{,}5;-2{,}25)$ верш.

Если $x<3$, то $(x-3)(y+3x-9)=-(x-3)^3$

$(x-3)(y+3x-9+x^2-6x+9)$

$$\left[\begin{array}{l}x=3\\ y=-x^2+3x\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=3\\ y=-x(x-3)\end{array}\right.$$ - парабола, $(1{,}5;2{,}25)$ верш.



1) Найдем то значение a, при котором $y=x+a$ будет касательной к графику функции $y=x^2-9x+18$ в точке x_0.

$$\begin{cases}2x_0-9=1\\ x_0^2-9x_0+18=x_0+a\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_0=5\\ a=5^2-9\cdot5+18-5;\ a=-7\end{cases}$$

$A(5;-2)$

2) $y=x+a$; $y=-x^2+3x$.

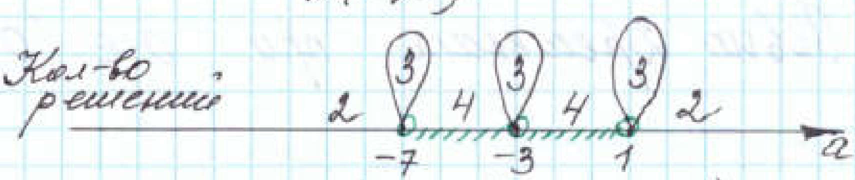
$x+a=-x^2+3x$

$x^2-2x+a=0$

1 корень, если $D=0$.

$\frac{D}{4}=1-a$; $1-a=0$, $a=1$

$B(1;2)$



$a\in(-7;-3)\cup(-3;1)$

Ответ: $(-7;-3)\cup(-3;1)$

$\boxed{18.5.}$ 5) ЕГЭ – 2015

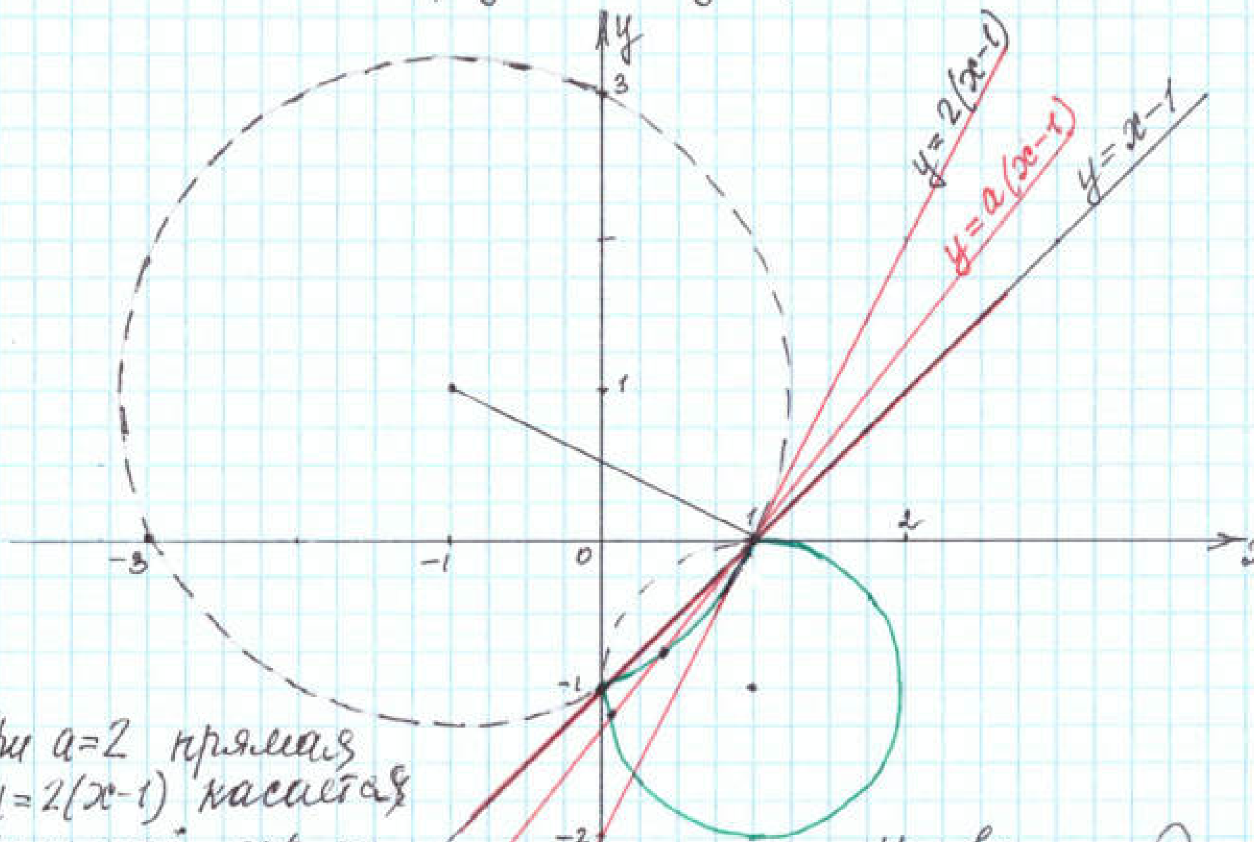
a – ? более двух решений

$$\begin{cases} 2x-2y-2=|x^2+y^2-1| \\ y=a(x-1) \end{cases}$$

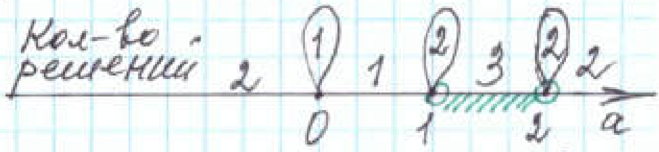
1) $\begin{cases} 2x-2y-2 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2-1=2x-2y-2 \\ x^2+y^2-1=-2x+2y+2 \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} y \leq x-1 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-2x+y^2+2y=-1 \\ x^2+2x+y^2-2y=3 \end{array}\right. \end{cases}$

$\begin{cases} y \leq x-1 & \text{полуплоскость} \\ \left[\begin{array}{ll} (x-1)^2+(y+1)^2=1 & \text{окружность, } (1;-1)\text{ – центр, } r=1 \\ (x+1)^2+(y-1)^2=5 & \text{окружность, } (-1;1)\text{ – центр, } R=\sqrt{5} \end{array}\right. \end{cases}$

(2) $y=a(x-1)$ пучок прямых, проходящих через точку $(1;0)$.



При $a=2$ прямая $y=2(x-1)$ касается большой окр-ти



Более двух решений при $a \in (1;2)$.

Ответ: $(1;2)$.

Задание №18.5 (ДЗ). Ответы.

1) $[4,5;\ 5,5];\ [8,5;\ 9,5]$.

2) $(1;\ 16];\ [66;\ 81)$.

3) $\left(\frac{1}{6};\ \frac{1}{3}\right];\ \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

4) $1;\ 2;\ 3$.

5) $(-5\sqrt{5}-5;\ -10];\ [0;\ 5\sqrt{5}-5)$.

Задание №18.6. Графические решения. Плоскость XOY (часть 2).

1) (ЕГЭ-2015)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2 - xy - 4y + 2x + 4)\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}} = 0, \\ a = x + y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

2) (ЕГЭ-2013)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$8a + \sqrt{7 + 6x - x^2} = ax + 4$$

имеет единственное решение.

3) (ЕГЭ-2012)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\frac{5}{x} - 3\right| = ax - 2$$

на промежутке $(0; +\infty)$ имеет более двух корней.

4) (ЕГЭ-2012)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a|x - 2| = \frac{3}{x+1}$$

на промежутке $[0; +\infty)$ имеет ровно два корня.

5) (ЕГЭ-2012)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{1 - 2x} = a - 7|x|$$

имеет более двух корней.

$\boxed{18.6}$ 1) ЕГЭ-2015

a - ? единственное решение

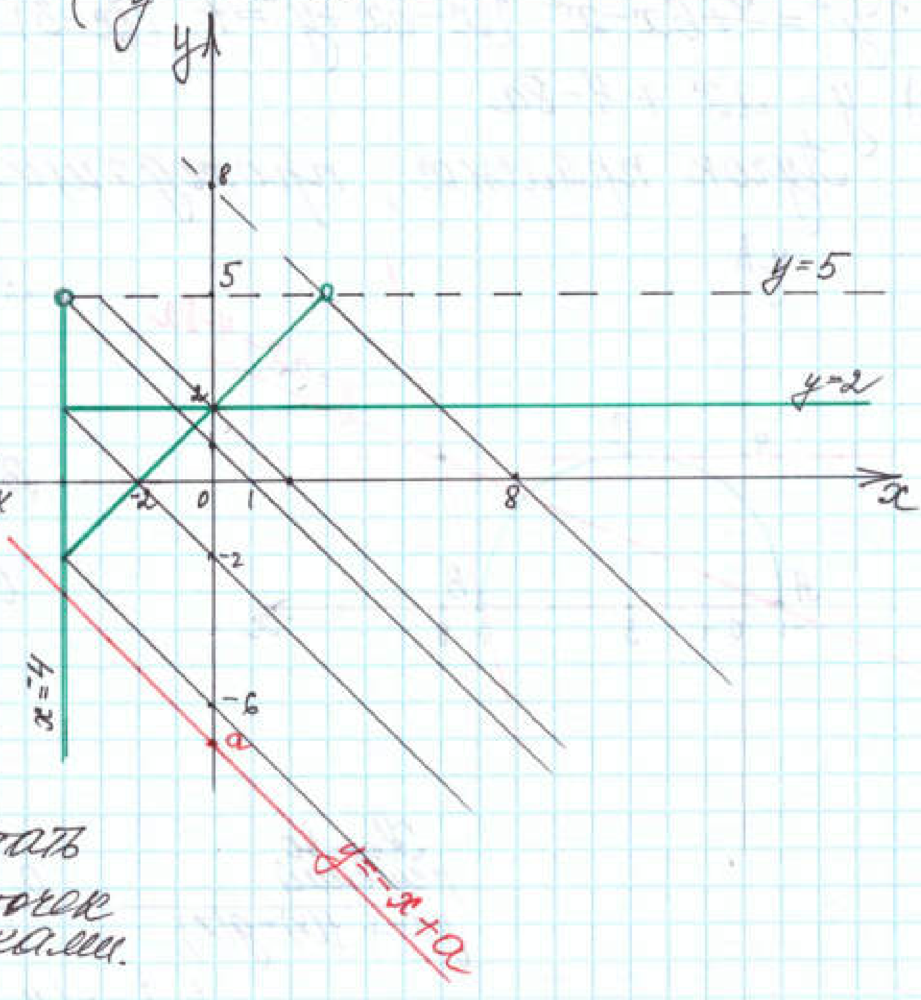
$$\begin{cases} \dfrac{(y^2-xy-4y+2x+4)\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}}=0 \\ a=x+y \end{cases}$$

Найдем ограничения на переменные x и y:

$$\begin{cases} x+4\geq 0 \\ 5-y>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq -4 \\ y<5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y^2-xy-4y+2x+4=0 \\ x+4=0 \end{array}\right. \\ y=a-x \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y^2-(x+4)y+(2+x)\cdot 2=0 \\ x=-4 \end{array}\right. \\ y=a-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=x+2 \\ y=2 \\ x=-4 \end{array}\right. \\ y=a-x \end{cases}$$



Множество точек координатной пл-ти xOy, удовлетворяющих совокупности, выделено зеленым цветом.

Будем двигать прямую $y=-x+a$ снизу вверх и считать количество общих точек с зелеными точками.

$a\in(-\infty;-6]\cup\{2\}\cup[8;+\infty)$

<u>Ответ</u>: $(-\infty;-6]\cup\{2\}\cup[8;+\infty)$

18.6 2) ЕГЭ – 2013

a – ? единственное решение.

$$8a+\sqrt{7+6x-x^2}=ax+4.$$

$$\sqrt{7+6x-x^2}=ax+4-8a$$

Построим графики функций $y=f(x)$, где $f(x)=\sqrt{7+6x-x^2}$ и $y=g(x)$, где $g(x)=ax+4-8a$, затем решим уравнение $f(x)=g(x)$.

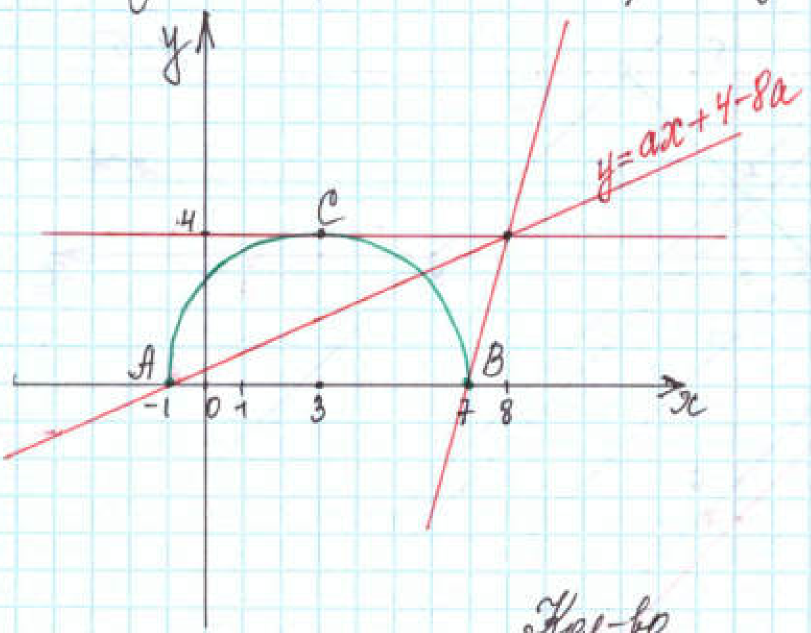
1) $y=\sqrt{7+6x-x^2}$

$$\begin{cases} y\geq 0 \\ y^2=7+6x-x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y\geq 0 \\ x^2-6x+y^2=7 \end{cases} \quad \begin{cases} y\geq 0 \\ (x-3)^2+y^2=16, \end{cases}$$

Окружность $(3;0)$ центр $R=4$.

2) $y=ax+4-8a$

Пучок прямых, проходящих через точку $(8;4)$



$A(-1;0)$ $\quad 0=-a+4-8a$

$9a=4$

$a=\frac{4}{9}$

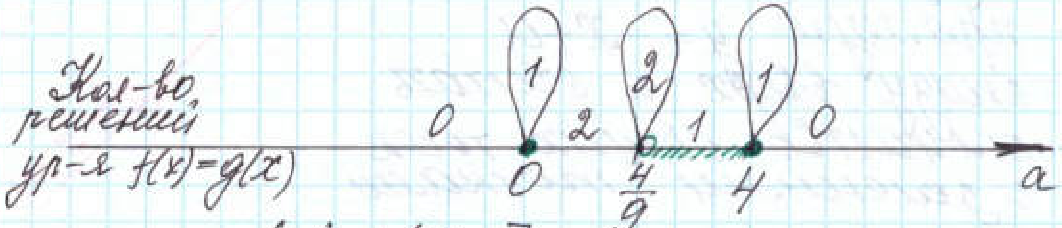
$B(7;0)$ $\quad 0=7a+4-8a$

$a=4$

$C(3;4)$ $\quad 4=3a+4-8a$

$5a=0$

$a=0.$



$$a\in\{0\}\cup\left(\frac{4}{9};4\right]$$

Ответ: $\{0\}\cup\left(\frac{4}{9};4\right]$

18.6. 3) ЕГЭ - 2012

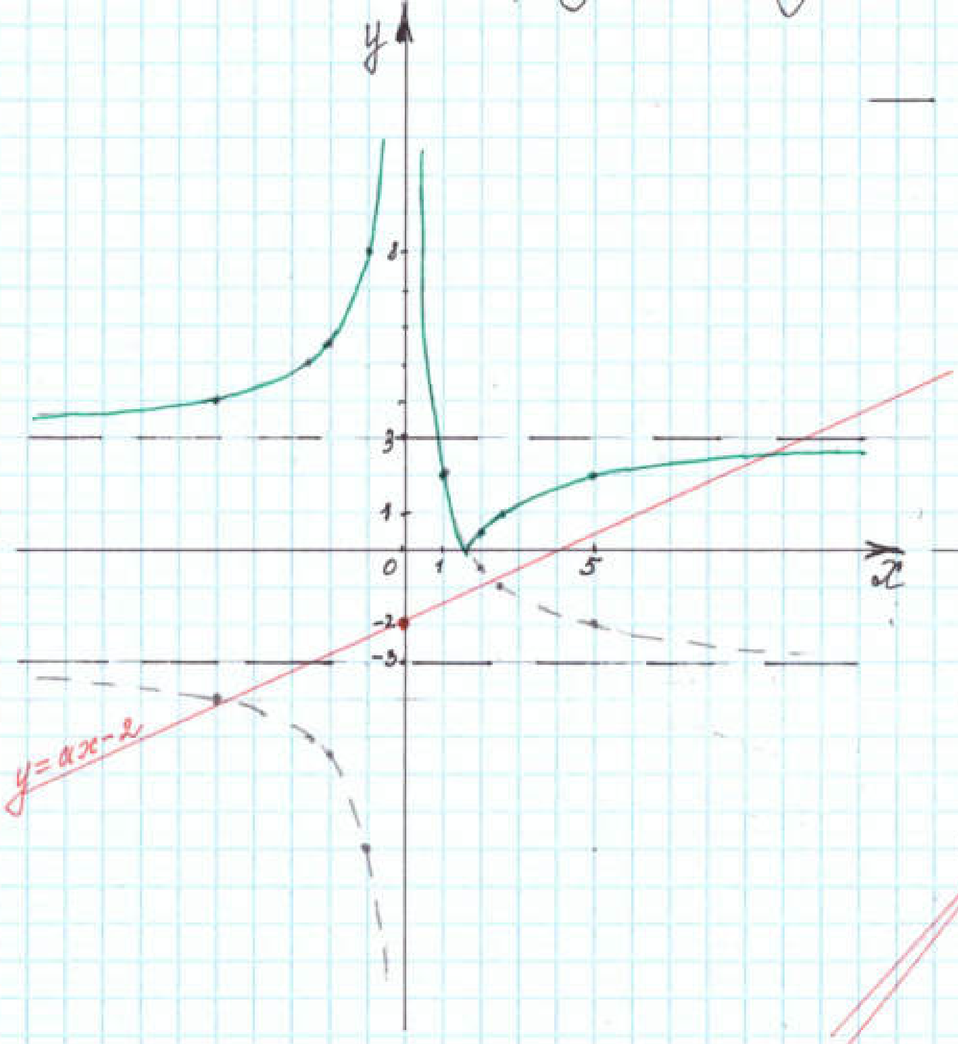
a - ? более двух корней на $(0;+\infty)$

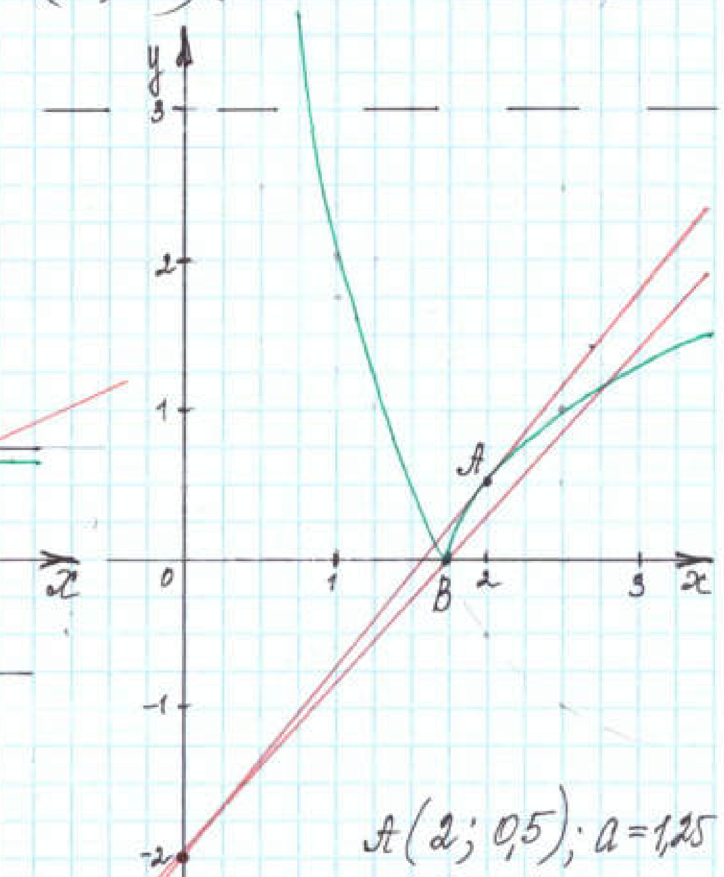
$$\left|\frac{5}{x}-3\right| = ax-2$$

1) Построим график функции $y=\left|\frac{5}{x}-3\right|$ с помощью преобразований:

1. $y=\frac{5}{x}$
2. $y=\frac{5}{x}-3$
3. $y=\left|\frac{5}{x}-3\right|$

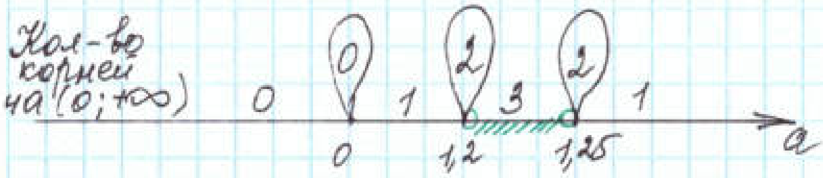
2) $y=ax-2$. Это пучок прямых, проходящих через точку $(0;-2)$.





$A(2;\ 0{,}5);\ a=1{,}25$

$B(\frac{5}{3};\ 0);\ a=1{,}2$



$a\in(1{,}2;\ 1{,}25)$

Ответ: $(1{,}2;\ 1{,}25)$

Найдём то значение a, при котором прямая $y=ax-2$ будет являться касательной к графику функции $y=-\left(\frac{5}{x}-3\right)$ в точке с абсциссой x_0.

$$\begin{cases} ax_0-2=-\frac{5}{x_0}+3 \\ a=\frac{5}{x_0^2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_0\cdot\frac{5}{x_0^2}+\frac{5}{x_0}=5 \\ a=\frac{5}{x_0^2} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{10}{x_0}=5 \\ a=\frac{5}{x_0^2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_0=2 \\ a=1{,}25 \end{cases}$$

$A(2;0{,}5)$; $a=1{,}25$.

Найдем то значение a, при котором прямая $y=ax-2$ пройдет через точку $B\left(\frac{5}{3};0\right)$.

$0=\frac{5}{3}a-2$, $\frac{5}{3}a=2$, $a=\frac{6}{5}$, $a=1{,}2$

18.6. 4) ЕГЭ-2012

a - ? ровно 2 корня на $[0;+\infty)$.

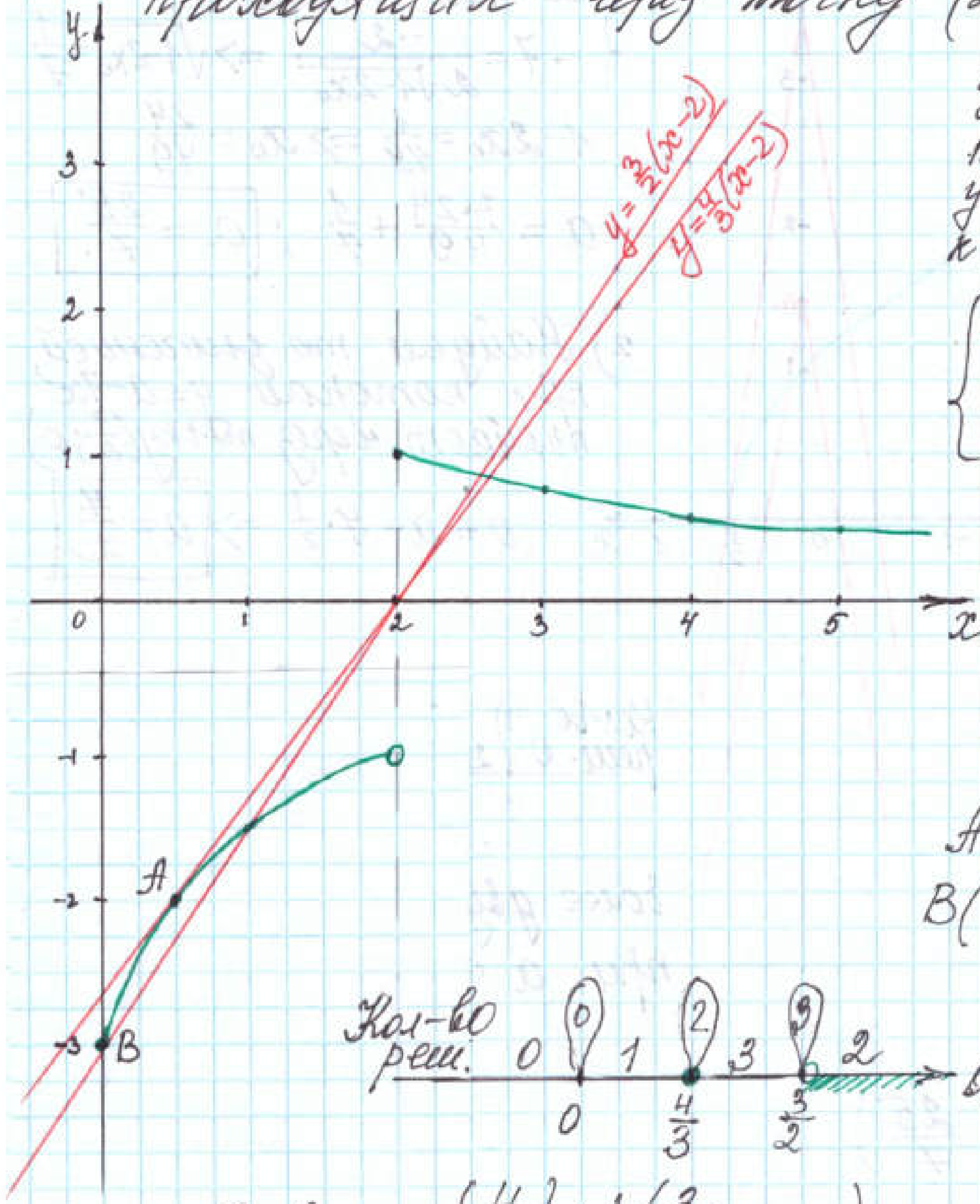
$$a|x-2| = \frac{3}{x+1}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ a(x-2) = \frac{3}{x+1} \end{cases} \\ \begin{cases} x-2 < 0 \\ a(x-2) = \frac{-3}{x+1} \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 2 \\ a(x-2) = \frac{3}{x+1} \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \leq x < 2 \\ a(x-2) = \frac{-3}{x+1} \end{cases} \end{array}\right.$$

$0 \leq x < 2$, т.к. $x \in [0;+\infty)$

Построим графики $y = \frac{3}{x+1}$ для $x \geq 2$ и $y = \frac{-3}{x+1}$ для $0 \leq x < 2$.

Уравнение $y = a(x-2)$ задает пучок прямых, проходящих через точку $(2;0)$.



Найдем то значение a, при котором прямая $y = a(x-2)$ будет касательна к графику $y = \frac{-3}{x+1}$ в т. x_0.

$$\begin{cases} a(x_0-2) = \frac{-3}{x_0+1} \\ a = \frac{3}{(x_0+1)^2} \end{cases}$$

$$\frac{3(x_0-2)}{(x_0+1)^2} = \frac{-3\cdot(x_0+1)}{(x_0+1)(x_0+1)}$$

$3x_0 - 6 = -3x_0 - 3$

$6x_0 = 3$

$x_0 = 0,5 \Rightarrow \boxed{a = \frac{4}{3}}$

$A(0,5;-2)$.

$B(0;-3)$: $-3 = a(-2)$

$\boxed{a = \frac{3}{2}}$

Ровно 2 решения при $a \in \left\{\frac{4}{3}\right\} \cup \left(\frac{3}{2};+\infty\right)$

Ответ: $\left\{\frac{4}{3}\right\} \cup \left(\frac{3}{2};+\infty\right)$

18.6. 5) ЕГЭ-2012

a – ? более двух решений

$$\sqrt{1-2x} = a - 7|x|$$

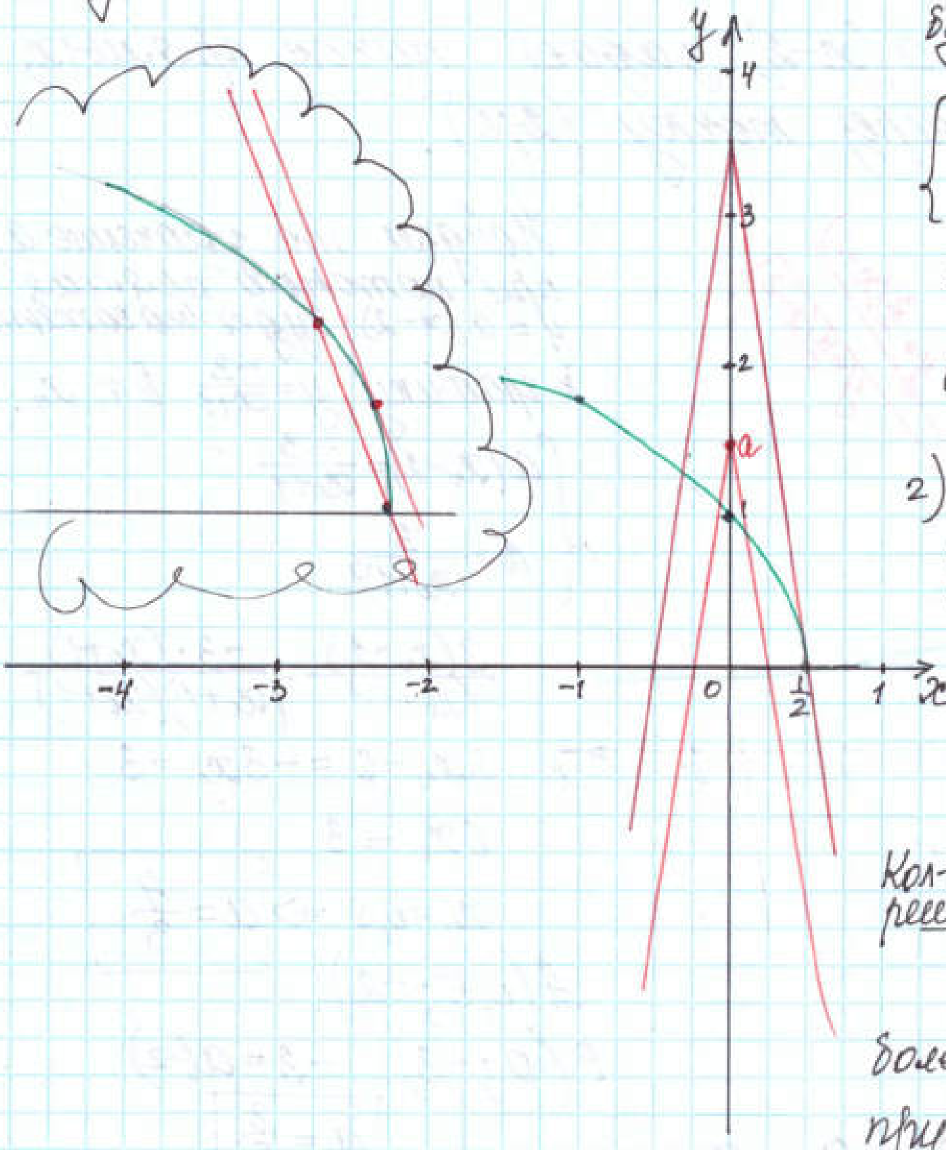
Построим графики функций:

$y = \sqrt{1-2x}$ и $y = a - 7|x|$.

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y = \sqrt{2\left(\frac{1}{2} - x\right)} \end{cases}$$

1. $y = \sqrt{-x}$
2. $y = \sqrt{\frac{1}{2} - x}$
3. $y = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} - x}$

1. $y = -|x|$
2. $y = -7|x|$
3. $y = a - 7|x|$.



1) Найдем то значение a, при котором $y = a - 7x$ будет касаться $y = \sqrt{1-2x}$.

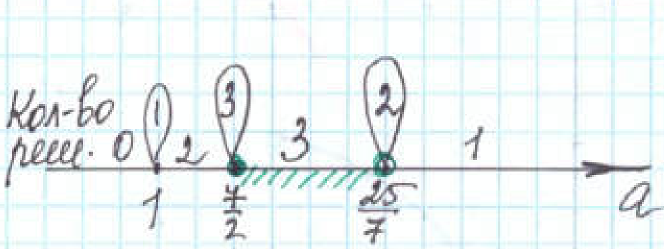
$$\begin{cases} a - 7x_0 = \sqrt{1-2x_0} \\ -7 = \dfrac{-2}{2\sqrt{1-2x_0}} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{1-2x_0} = \frac{1}{7}$$

$$1 - 2x_0 = \frac{1}{49} \Rightarrow x_0 = \frac{24}{49}$$

$$a = \frac{7 \cdot 24}{49} + \frac{1}{7}; \quad \boxed{a = \frac{25}{7}}$$

2) Найдем то значение a, при котором $y = a - 7x$ пройдет через точку $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$

$$0 = a - 7 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a = \frac{7}{2}}$$



более двух решений будет при $a \in \left[\frac{7}{2}; \frac{25}{7}\right)$

Ответ: $\left[\frac{7}{2}; \frac{25}{7}\right)$

Задание №18.6. Ответы.

1) $(-\infty;\ -6];\ \{2\};\ [8;\ +\infty)$.

2) $\{0\};\left(\dfrac{4}{9};\ 4\right]$.

3) $(1,2;\ 1,25)$.

4) $\left\{\dfrac{4}{3}\right\};\ (1,5;\ +\infty)$.

5) $\left[\dfrac{7}{2};\ \dfrac{25}{7}\right)$.

Задание №18.7. Параметр. Разное.

1) (ЕГЭ-2019)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$3\sin x + \cos x = a$$

имеет ровно один корень на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

2) (ЕГЭ-2018)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(4x - x^2)^2 - 32\sqrt{4x - x^2} = a^2 - 14a$$

имеет хотя бы один корень.

3) (ЕГЭ-2014)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое решение уравнения

$$4\sqrt[3]{3,5x - 2,5} + 3\log_2(3x - 1) + 2a = 0$$

принадлежит отрезку $[1; 3]$.

4) (ЕГЭ-2014)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$|3\sin x + a^2 - 22| + |7\sin x + a + 12| \leqslant 11\sin x + |a^2 + a - 20| + 11$$

верно для любого действительного x.

5) (ЕГЭ-2013)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(4\cos x - 3 - a) \cdot \cos x - 2,5\cos 2x + 1,5 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

6) (ЕГЭ-2012)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^{10} + (a - 2|x|)^5 + x^2 - 2|x| + a = 0$$

имеет более трех различных решений.

7) (ЕГЭ-2011)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 7 \cdot 2^{|x|} + 2 \cdot |x| + 6 = 7y + 2x^2 + 5a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$\boxed{18.7.}$ 1) ЕГЭ-2019

a - ? ровно один корень на $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$

$$3\sin x + \cos x = a.$$

$$\sqrt{10}\left(\sin x \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} + \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}\right) = a$$

$$\sin x \cdot \cos\varphi + \cos x \cdot \sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{10}}, \text{ где } \cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}, \ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

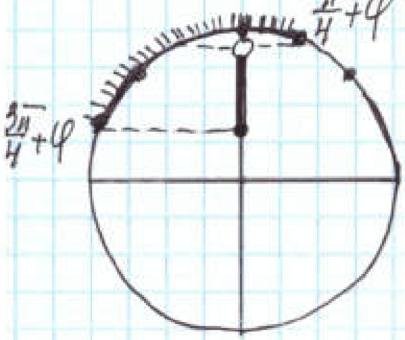
$$\sin(x+\varphi) = \frac{a}{\sqrt{10}}$$

$$0 < \frac{1}{\sqrt{10}} < \frac{1}{2}$$

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} + \varphi \le x + \varphi \le \frac{3\pi}{4} + \varphi, \text{ где } \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right).$$



Чтобы уравнение $\sin(x+\varphi) = \frac{a}{\sqrt{10}}$ имело ровно один корень, должны выполняться условия:

$$\left[\begin{array}{l} \sin\left(\frac{3\pi}{4}+\varphi\right) \le \frac{a}{\sqrt{10}} < \sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right) \\ \frac{a}{\sqrt{10}} = 1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{3\pi}{4}\cdot\cos\varphi + \cos\frac{3\pi}{4}\cdot\sin\varphi \le \frac{a}{\sqrt{10}} < \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\varphi + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\varphi \\ a = \sqrt{10} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} \le \frac{a}{\sqrt{10}} < \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} \\ a = \sqrt{10} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{10}} \le \frac{a}{\sqrt{10}} < \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{10}} \\ a = \sqrt{10} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{2} \le a < 2\sqrt{2} \\ a = \sqrt{10} \end{array}\right. \qquad a \in [\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \cup \{\sqrt{10}\}.$$

Ответ: $[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \cup \{\sqrt{10}\}$

18.7. 2) ЕГЭ-2018

a-? хотя бы один корень

$$(4x-x^2)^2-32\sqrt{4x-x^2}=a^2-14a.$$

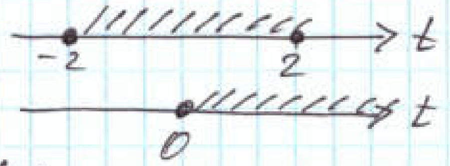
Пусть $\sqrt{4x-x^2}=t$, $t\geq 0$.

$4x-x^2=t^2$

$x^2-4x+t^2=0.$

Хотя бы один корень у этого уравнения будет, если $D\geq 0$ (или $\frac{D}{4}\geq 0$).

$\frac{D}{4}=4-t^2$, $4-t^2\geq 0$, $t^2-4\leq 0$, $(t-2)(t+2)\leq 0$

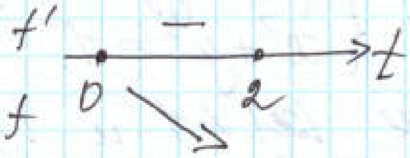


$\boxed{0\leq t\leq 2}$

Введем функцию $f(t)=t^4-32t$, где $0\leq t\leq 2$.

$f'(t)=4t^3-32=4(t^3-8).$

$f'(t)=0$; $t^3-8=0$, $t=2$.



$f(0)=0$

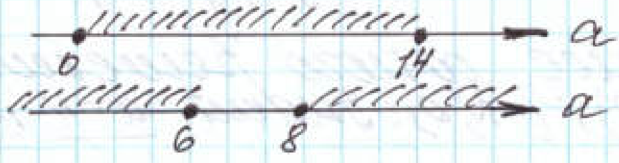
$f(2)=2^4-32\cdot 2=16-64=-48.$

$-48\leq f(t)\leq 0.$

Уравнение $f(t)=a^2-14a$ будет иметь хотя бы одно решение, если

$-48\leq a^2-14a\leq 0$

$$\begin{cases} a(a-14)\leq 0 \\ a^2-14a+48\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a(a-14)\leq 0 \\ (a-6)(a-8)\geq 0 \end{cases}$$



$a\in[0;6]\cup[8;14]$

<u>Ответ</u>: $[0;6]\cup[8;14]$

18.7. 3) ЕГЭ — 2014

a - ? любое решение уравнения принадлежит $[1;3]$

$4\cdot\sqrt[3]{3{,}5x-2{,}5}+3\cdot\log_2(3x-1)+2a=0.$

Рассмотрим функцию $f(x)=4\cdot\sqrt[3]{3{,}5x-2{,}5}$, она существует на $[1;3]$ и возрастает на нём, т.к. её производная положительна.

$f'(x)=4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3{,}5}{\sqrt[3]{(3{,}5x-2{,}5)^2}}=\frac{14}{3\sqrt[3]{(3{,}5x-2{,}5)^2}}$, $f'(x)>0$.

Рассмотрим функцию $g(x)=3\cdot\log_2(3x-1)$, она существует при $x>\frac{1}{3}$, а значит на $[1;3]$ и возрастает на нём, т.к.

$g'(x)=3\cdot\frac{1}{(3x-1)\cdot\ln 2}$; $g'(x)>0$.

Левая часть данного уравнения представляет из себя возрастающую функцию, как сумма двух возрастающих функций. Значит своё наименьшее значение она будет принимать в левом конце отрезка, а наибольшее — в правом.

$f(x)+g(x)+2a=0$

При $x=1$ $4\sqrt[3]{1}+3\log_2 2+2a=0$; $2a=-7$, $a=-3{,}5$

При $x=3$ $4\sqrt[3]{8}+3\log_2 8+2a=0$; $2a=-17$, $a=-8{,}5$.

Значит, при $a\in[-8{,}5;-3{,}5]$ любое решение уравнения будет попадать на $[1;3]$.

Ответ: $[-8{,}5;-3{,}5]$

18.7. 4) ЕГЭ-2014

a-? неравенство верно для любого действительного x

$$|3\sin x+a^2-22|+|7\sin x+a+12|\le 11\sin x+|a^2+a-20|+11.$$

Если неравенство должно выполняться для любого действительного x, то и для конкретного x, например, для $x=-\frac{\pi}{2}$, при этом $\sin x=-1$.

$$|-3+a^2-22|+|-7+a+12|\le -11+|a^2+a-20|+11$$

$$(*)\quad |a^2-25|+|a+5|\le |a^2+a-20|$$

$$|(a-5)(a+5)|+|a+5|\le |(a-4)(a+5)| \qquad \text{I способ}$$

	$a<-5$	$-5<a<4$	$4<a<5$	$a>5$
$(a-5)(a+5)$	+	−	−	+
$(a+5)$	−	+	+	+
$(a-4)(a+5)$	+	−	+	+

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\le -5\\ a^2-25-a-5\le a^2+a-20\end{cases}\\ \begin{cases}-5<a\le 4\\ -a^2+25+a+5\le -a^2-a+20\end{cases}\\ \begin{cases}4<a\le 5\\ -a^2+25+a+5\le a^2+a-20\end{cases}\\ \begin{cases}a>5\\ a^2-25+a+5\le a^2+a-20\end{cases}\end{array}\right.
\quad
\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\le -5\\ 2a\ge -10\end{cases}\\ \begin{cases}-5<a\le 4\\ 2a\le -10\end{cases}\\ \begin{cases}4<a\le 5\\ 2a^2\ge 50\end{cases}\\ \begin{cases}a>5\\ -20\le -20\end{cases}\end{array}\right.
\quad
\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\le -5\\ a\ge -5\end{cases}\\ \begin{cases}-5<a\le 4\\ a\le -5\end{cases}\ \text{нет реш.}\\ \begin{cases}4<a\le 5\\ |a|\ge 5\end{cases}\\ a>5\end{array}\right.
\quad
\left[\begin{array}{l}a=-5\\ a=5\\ a>5\end{array}\right.$$

Получим $a\in\{-5\}\cup[5;+\infty)$

<u>Ответ</u>: $\{-5\}\cup[5;+\infty)$

(*) $|a^2-25|+|a+5| \le |a^2+a-20|$

II способ

$|m|+|n| \geq |m+n|$

Заметим, что $(a^2-25)+(a+5)=a^2+a-20$,
поэтому $|m+n| \le |m|+|n| \le |m+n|$
это неравенство выполняется только при условии $|m|+|n|=|m+n|$.

$|a^2-25|+|a+5|=|a^2+a-20|$

$|(a-5)(a+5)|+|a+5|-|(a+5)(a-4)|=0$

$|a-5|\cdot|a+5|+|a+5|-|a+5|\cdot|a-4|=0$

$|a+5|\cdot(|a-5|+1-|a-4|)=0$

$|a+5|=0$ или $|a-5|-|a-4|+1=0$

$a+5=0$

$\boxed{a=-5}$

$$\begin{array}{c|ccccc} & & 4 & & 5 & \to a \\ a-5 & - & & - & & + \\ a-4 & - & & + & & + \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \le 4 \\ -a+5+a-4+1=0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4<a\le 5 \\ -a+5-a+4+1=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a>5 \\ a-5-a+4+1=0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\le 4 \\ 2=0 \end{cases} \text{ нет реш.} \\ \begin{cases} 4<a\le 5 \\ a=5 \end{cases} \\ \begin{cases} a>5 \\ 0=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a=5 \\ a>5 \end{array}\right. \qquad \boxed{a \geq 5}$$

Объединим полученные решения:
$a \in \{-5\} \cup [5;+\infty)$

<u>Ответ</u>: $\{-5\} \cup [5;+\infty)$.

18.7. 5) ЕГЭ-2013

a - ? хотя бы один корень

$$(4\cos x - 3 - a)\cos x - 2{,}5\cos 2x + 1{,}5 = 0 \quad (1)$$

Пусть $\cos x = t$, тогда $\cos 2x = 2t^2 - 1$.

$$(4t-3-a)t - 2{,}5(2t^2-1) + 1{,}5 = 0$$

$$4t^2 - 3t - at - 5t^2 + 2{,}5 + 1{,}5 = 0$$

$$t^2 + (a+3)t - 4 = 0 \quad (2)$$

Чтобы уравнение (1) имело хотя бы один корень, необходимо, чтобы уравнение (2) имело хотя бы один корень из промежутка $[-1;1]$.

$D = (a+3)^2 + 16$ $D > 0$ значит будут два разл. корня

$$t_1 = \frac{-a-3-\sqrt{(a+3)^2+16}}{2} \text{ и } t_2 = \frac{-a-3+\sqrt{(a+3)^2+16}}{2}$$

$-1 \le t_1 \le 1$ или $-1 \le t_2 \le 1$

$$\begin{cases} -a-3-\sqrt{(a+3)^2+16} \le 2 \\ -a-3-\sqrt{(a+3)^2+16} \ge -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{(a+3)^2+16} \ge -a-5 \quad (*) \\ \sqrt{(a+3)^2+16} \le -a-1 \quad (**) \end{cases}$$

$$(*) \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -a-5 < 0 \\ (a+3)^2+16 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -a-5 \ge 0 \\ a^2+6a+25 \ge a^2+10a+25 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a > -5 \\ \begin{cases} a \le -5 \\ a \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} a > -5 \\ a \le -5 \end{array}\right. \quad \forall a \in R.$$

$$(**) \begin{cases} -a-1 \ge 0 \\ a^2+6a+25 \le a^2+2a+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \le -1 \\ 4a \le -24 \end{cases} \quad \boxed{a \le -6}$$

$$\begin{cases} -a-3+\sqrt{(a+3)^2+16} \le 2 \\ -a-3+\sqrt{(a+3)^2+16} \ge -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+6a+25} \le a+5 \quad (v) \\ \sqrt{a^2+6a+25} \ge a+1 \quad (vv) \end{cases}$$

$$(v) \begin{cases} a+5 \ge 0 \\ a^2+6a+25 \le a^2+10a+25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \ge -5 \\ a \ge 0 \end{cases} \quad \boxed{a \ge 0}$$

$$(vv) \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+1 < 0 \\ a^2+6a+25 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a+1 \ge 0 \\ a^2+6a+25 \ge a^2+2a+1 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} a < -1 \\ \begin{cases} a \ge -1 \\ 4a \ge -24 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a < -1 \\ a \ge -1 \end{array}\right. \quad \forall a \in R$$

Найдём объединение полученных решений

$$a \in (-\infty; -6] \cup [0; +\infty)$$

<u>Ответ:</u> $(-\infty; -6] \cup [0; +\infty)$

18.7. б) ЕГЭ - 2012

a - ? более 3 разл. решений

$$x^{10}+(a-2|x|)^5+x^2-2|x|+a=0$$

Перепишем уравнение в виде

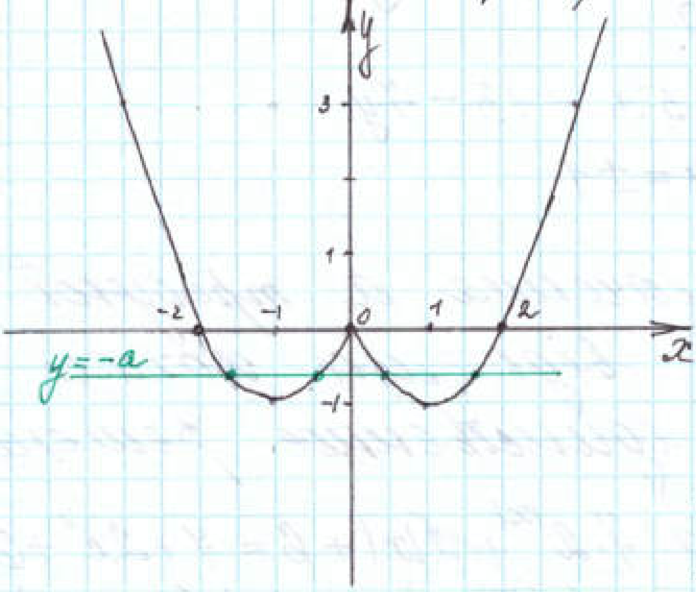
$$(x^2)^5+x^2=(2|x|-a)^5+(2|x|-a)$$

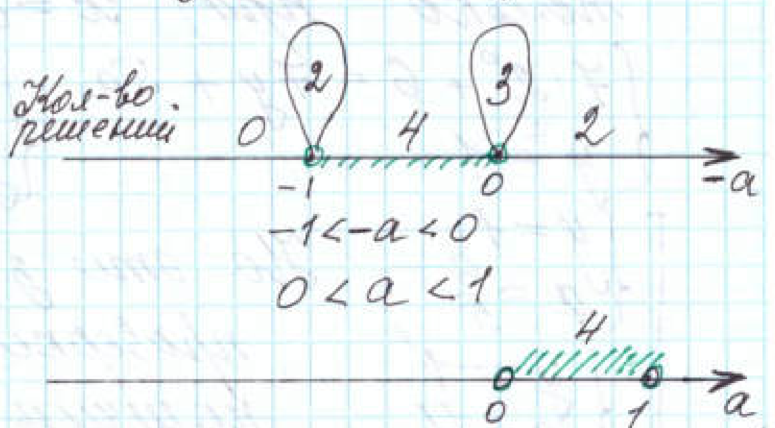
Введем функцию $f(t)=t^5+t$, $f(t)$ будет возрастать на R, т.к. $f'(t)=5t^4+1$, $f'(t)>0$ $\forall t\in R$.

Тогда уравнение $f(x^2)=f(2|x|-a)$ будет иметь решение, если $x^2=2|x|-a$.

$$x^2-2|x|=-a.$$

Решим его графически: $y=x^2-2|x|$, $y=-a$.





$-1<-a<0$

$0<a<1$

Более трех решений будет при $a\in(0;1)$.

Ответ: $(0;1)$

18.7. 7) ЕГЭ – 2011.

a – ? единственное решение

$$\begin{cases} 7\cdot 2^{|x|}+2|x|+6=7y+2x^2+5a \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

Заметим, что система симметрична относительно x, поэтому вместе с решением $(x_0;y_0)$ всегда будет иметь решение $(-x_0, y_0)$. И тогда нечётное количество решений возможно только при $x=0$.

$$\begin{cases} 7\cdot 2^0+6=7y+5a \\ y^2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 5a=13-7y \\ y=\pm 1 \end{cases}$$

Если $y=1$, то $a=\frac{6}{5}$

Если $y=-1$, то $a=4$.

Проверим эти значения a.

Будет ли решение единственным.

$\boxed{a=\frac{6}{5}}$ $\begin{cases} 7\cdot 2^{|x|}+2|x|-7y-2x^2=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 7(2^{|x|}-y)=2|x|\cdot(|x|-1) \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

Из второго уравнения получим $|x|\le 1$ и $|y|\le 1$.

Тогда $7\cdot(2^{|x|}-y)\geqslant 0$; $2|x|(|x|-1)\le 0$,

а значит равенство возможно лишь в случае $\begin{cases} 7(2^{|x|}-y)=0 \\ 2|x|(|x|-1)=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

$x=0 \Rightarrow y=1$ $(0;1)$ – реш.

$x=1 \Rightarrow y=2$ не подх.

$x=-1 \Rightarrow y=2$ не подх.

Значит при $a=\frac{6}{5}$ единственное решение $(0;1)$.

$\boxed{a=4}$ $\begin{cases} 7\cdot 2^{|x|}+2|x|+6=7y+2x^2+20 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 7(2^{|x|}-y-2)=2|x|(|x|-1) \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

Эта система имеет более одного решения, например, $(0;-1)$, $(1;0)$; $(-1;0)$. Значит $\underline{a=4}$ $\underline{\text{не подх.}}$

<u>Ответ</u>: $\frac{6}{5}$

Задание №18.7. Ответы.

1) $[\sqrt{2};\ 2\sqrt{2});\ \sqrt{10}$.

2) $[0;\ 6];\ [8;\ 14]$.

3) $[-8,5;\ -3,5]$.

4) $-5;\ [5;\ +\infty)$.

5) $(-\infty;-6];\ [0;\ +\infty)$.

6) $(0;1)$.

7) $\frac{6}{5}$.