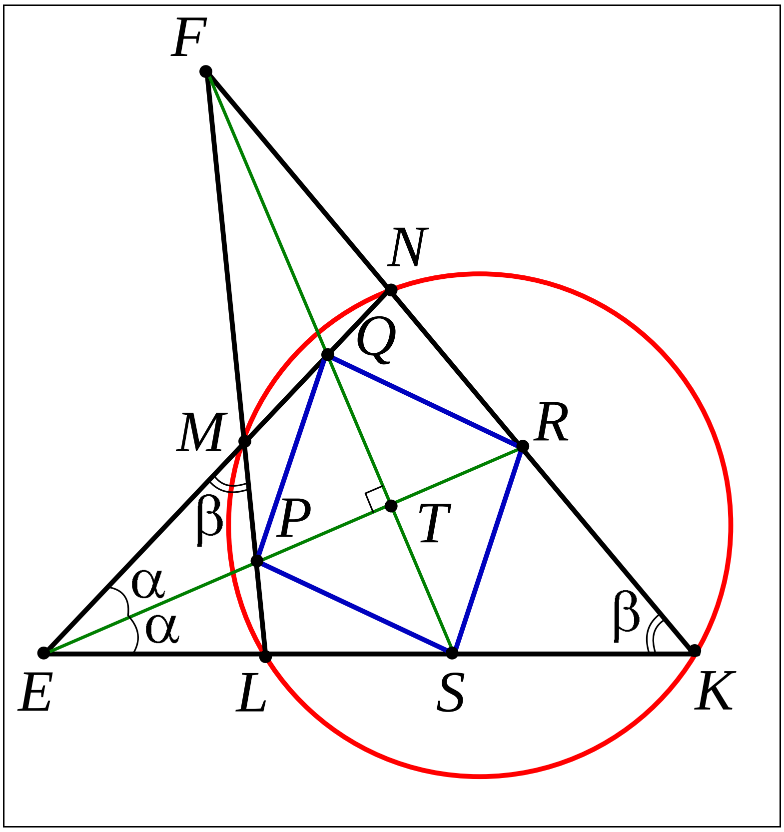
# МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2015

## Планиметрические задачи на вычисление и доказательство
## (типовые задания 18 (С4))


*Прокофьев А.А.* *Корянов А.Г.*

**Прокофьев А.А.** – доктор педагогических наук, заведующий кафедрой высшей математики №1 НИУ МИЭТ, учитель математики ГОУ лицей №1557 г. Зеленограда; e-mail: aaprokof@yandex.ru

**Корянов А.Г.** – методист по математике городского информационно-методического Центра (ГИМЦ) г. Брянска, учитель математики средней общеобразовательной школы №41 г. Брянска; e-mail: akoryanov@mail.ru




**МОСКВА &БРЯНСК**

**2014**

## Введение

Изменения в ЕГЭ 2014/15 по математике в большей мере относятся к изменению типа задачи С4 (в новой версии задание 18). В вариантах 2010-2013 задача С4 была *многовариантной,* т.е. содержала в условии некоторую неопределенность, позволявшую трактовать условие неоднозначно, что приводило к возможности построения нескольких чертежей, удовлетворяющих условию задачи. Перебор возникающих вариантов являлся частью решения задач такого типа.

В подготовительный период и на самом экзамене ЕГЭ 2014 предлагались задачи *на доказательство и вычисление,* решение которых состояло из двух частей. В первой части решения было необходимо проанализировать имеющуюся в условии задачи геометрическую конфигурацию и доказать, что она обладает определенным свойством. Во второй части решения, опираясь на доказанное свойство или возможно и без него, было необходимо решить задачу на нахождение величин (линейных, угловых, отношений отрезков, площадей фигур). Соответствующая структура задания сохраняется и в задании 18 ЕГЭ 2015.

Отметим некоторые особенности, относящиеся к первому и второму пункту задачи 18 (С4) образца 2014 и 2015 гг.

### *Особенности первого пункта задачи*

Первый пункт задачи предполагает доказательство свойства описанной в условии геометрической конфигурации.

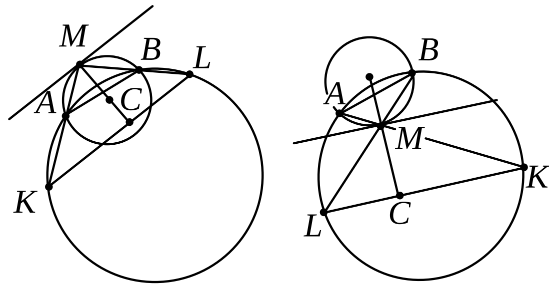
***Комментарий* 1**. В случае если заданная конфигурация не является однозначной, должны быть рассмотрены все ее реализации и должно быть доказано, что в каждой из них выполняется указанное свойство. Рассмотрим, например, следующую задачу.

**Пример (Агентство «Лидер», вариант №271, 2013/14).** *Две окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ пересекаются в точках $A$ и $B$. Через точку $M$ (не совпадающей с точками $A$ и $B$) окружности $\omega_1$ проведены прямые $MA$ и $MB$, пересекающие окружность $\omega_2$ в точках $K$ и $L$ соответственно.*

а) *Докажите, что прямая $KL$, параллельна касательной, проведенной к окружности $\omega_1$ в точке $M$.*

б) *Радиус окружности $\omega_1$, проведенный в точку $M$, продолжили до пересечения с прямой $KL$ в точке $C$. Известно, что радиус окружности $\omega_1$ равен* 6, $ML = 18$, $MC = 15$. *Найдите $MB$.*

***Комментарий.*** В данной задаче можно построить два рисунка, удовлетворяющих условию (см. рис. 1*а*, *б*). Доказательство пункта а) следует провести в обоих случаях.




*а* *б*

Рис. 1

В рассматриваемой задаче ответ пункта б) получается одинаковым для обеих конфигураций $MB = 10$.

***Комментарий* 2**. Следует обратить внимание на то, что в условии, описывающей геометрическую конфигурацию, возможны две ситуации.

1. Условие задачи, приведенное до первого пункта, не содержит числовых данных. В этом случае свойство, которое нужно доказать в первом пункте, является общим и выполняется для всех конфигураций описанных в условии.

2. Условие задачи, приведенное до первого пункта, содержит числовые данные. В этом случае доказываемое свойство обычно является частным и выполняется только для приведенного в условии набора числовых данных и доказательство основывается на вычислениях, то есть сводится к проверке указанного свойства (см. пример 1).

***Комментарий* 3**. При подготовке к сдаче ЕГЭ и обучении решению задач С4 следует отметить, что для выполнения первого пункта задачи нужно помнить основные определения, теоремы и следствия из них, а также признаки и свойства геометрических фигур. В основном первая часть решения сводится к доказательству одного из следующих свойств приведенной в условии геометрической конфигурации:

а) подобия указанных треугольников;

б) параллельность или перпендикулярность указанных прямых;

в) равенство указанных углов, отрезков, площадей или их заданное отношение;

г) принадлежность указанной фигуры к определенному типу:

- треугольник является прямоугольным, равнобедренным и т.д.;
- четырехугольник является описанным или вписанным;
- четырехугольник обладает признаками параллелограмма, ромба, трапеции и т.д.;
- точка равноудалена от вершин или сторон многоугольника, то есть является центром вписанной или описанной окружностей;
- прямая содержит указанные точку или отрезок.

***Комментарий* 4**. Обучение доказательству в геометрии начинается с первых уроков изучения предмета, поэтому основные приемы доказательств геометрических фактов должны быть показаны еще в основной школе при доказательстве теорем и выводах формул. В старшей школе при подготовке к сдаче ЕГЭ акцент должен быть направлен на применение этих приемов к более сложным конфигурациям геометрических фигур.

Желательно на уроках повторения давать учащимся задачи блоками, напомнив основные теоретические факты, которые могут оказаться полезными для решения предложенных задач. Причем их набор должен быть шире, чем требуется для решения каждой отдельной задачи из предложенного блока.

Необходимо обращать внимание учащихся на поиски пути решения задачи. Обоснование выбора пути можно осуществлять в виде предварительного рассуждения, либо после проведения доказательства. Вопросы для учащихся могут быть примерно такого содержания:

Какое определение (теорему, следствие) мы вспомнили?

Почему рассмотрены такие-то фигуры?

Чего мы достигли, проведя такое-то дополнительное построение? И т.п.

### *Особенности второго пункта задачи*

***Комментарий* 1**. Для выполнения второго пункта задачи на нахождение требуемых величин в заданной геометрической конфигурации нужно помнить основные формулы для вычисления соответствующих элементов:

а) для линейных – это теоремы: Пифагора, косинусов, синусов, о секущих и касательных, о хордах; формулы: длины медианы, биссектрисы и т.д.;

б) для угловых – это теоремы: косинусов, синусов, об измерении углов, связанных с окружностью (центральных, вписанных, не вписанных, между хордой и касательной) и т.д.;

в) для площадей – это теоремы: об отношении площадей подобных фигур; об отношении площадей фигур, имеющих равные элементы; формулы вычисления площадей треугольника и многоугольников, круга и его частей и т.д.

г) отношений отрезков или площадей фигур – это теоремы: Фалеса, о пропорциональных отрезках, о метрических соотношениях в треугольнике и круге, об отношении соответствующих элементов подобных фигур и т.д.

***Комментарий* 2**. Может оказаться, что имеется несколько способов для решения второго пункта задачи. В частности, может быть использован способ вычисления, не опирающийся на свойство, сформулированное в первом пункте. В этом случае без выполнения первого пункта работа будет оценена только за вычислительную часть задачи в два балла из трех возможных.

Можно предложить учащимся некоторый алгоритм общего характера для решения геометрических задач.

1. Понять условие задачи.

1.1. Повторить определение основных геометрических понятий, которые упомянуты в условии задачи.

1.2. Выполнить примерный чертеж, соответствующий условию задачи.

1.3. Отметить данные и искомые величины на чертеже.

2. План решения.

2.1. Вспомнить теоремы о соотношениях между данными и искомыми величинами.

2.2. Рассмотреть вспомогательные фигуры (треугольники, четырехугольники, окружности), в которых связаны данные и искомые величины.

2.3. Провести дополнительное построение для получения новых геометрических фигур.

2.4. Вспомнить методы решения подобных задач.

В пособии будет рассмотрена следующая классификация планиметрических задач на доказательство и вычисления: треугольники и окружности, связанные с ними; окружности и различные геометрические конфигурации, связанные с ними; многоугольники и связанные с ними окружности.

Настоящая лекция посвящена рассмотрению геометрических конфигураций, связанных с треугольником (линейные и угловые величины треугольников; подобие треугольников; площадь треугольника; окружности, связанные с треугольником).

## § 1. Треугольники

Приведем основные теоретические сведения, необходимые для решения задач, связанных с треугольником. При формулировании теоретических сведений для треугольника будем использовать стандартные обозначения (см. рис. 2).

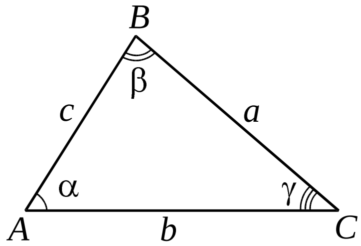



Рис. 2

### *Соотношения между сторонами и углами треугольника*

**Теорема.** Во всяком треугольнике:

1) против равных сторон лежат равные углы (и наоборот): $a = b \quad \Leftrightarrow \quad \angle A = \angle B$;

2) против большей стороны лежит больший угол (и наоборот):

$$a > b \quad \Leftrightarrow \quad \angle A > \angle B.$$

**Теорема косинусов:**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \angle A;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \angle B;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \angle C.$$

*Следствие* 1. Пусть $c$ – наибольшая сторона. Тогда:

**а**) если $c^2 < a^2 + b^2$, то треугольник остроугольный;

**б**) если $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник прямоугольный;

**в**) если $c^2 > a^2 + b^2$, то треугольник тупоугольный.

*Следствие* 2. Формулы для вычисления углов треугольника с известными сторонами:

$$\cos \angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos \angle B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$
$$\cos \angle C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

**Теорема Пифагора.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ $(\angle C = 90°)$ квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, то есть $c^2 = a^2 + b^2$.

**Теорема, обратная теореме Пифагора.** Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то этот треугольник прямоугольный.

**Теорема синусов:**

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R,$$

где $R$ – радиус описанной около треугольника окружности.

*Следствие* 1. Отношение двух сторон треугольника равно отношению синусов противолежащих им углов:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \angle A}{\sin \angle B}; \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \angle A}{\sin \angle C}; \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \angle B}{\sin \angle C}.$$

*Следствие* 2. В прямоугольном треугольнике катет, противолежащий углу в $30°$, равен половине гипотенузы (и обратно).

**Методические указания.** В качестве подготовительных задач можно предложить следующие.

*Задачи на доказательство.*

**1.** Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

**2.** Докажите, что если в треугольнике отношение тангенсов двух углов равно отношению квадратов синусов этих углов, то треугольник либо равнобедренный, либо прямоугольный.

**3.** Докажите, что если в треугольнике выполняется соотношение $\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}$, то треугольник равнобедренный.

*Задачи на вычисление.*

**4.** В треугольнике $ABC$ известно: $AC=3\sqrt{2}$, $BC=5$ и $\angle A=45°$. Найдите $AB$.

**5.** В треугольнике даны стороны $a=\sqrt{3}$, $b=2\sqrt{3}$. Угол $A$, противолежащий стороне $a$, равен $30°$. Найдите третью сторону.

**6**. В треугольнике $ABC$ найдите отношение $BC:AC$, если известно, что $\angle A=120°$ и $AB:AC=2$.

**7.** В треугольнике $ABC$ найдите угол $B$, если известно, что $\angle C=135°$ и $BC:AC=(\sqrt{3}-1):\sqrt{2}$.

**8.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ угол $B$ равен 110°. Внутри треугольника взята точка $M$ так, что $\angle MAC=30°$, $\angle MCA=25°$. Найдите угол $BMC$.

**9.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ ($AB=BC$) на стороне $BC$ выбрана точка $D$ так, что $BD:DC=1:4$. В каком отношении прямая $AD$ делит высоту $BM$ треугольника $ABC$?

**10.** На сторонах $AC$ и $BC$ треугольника $ABC$ взяты точки $K$ и $N$ так, что $CK:KA=2:3$, $CN:NB=4:3$. В каком отношении точка пересечения отрезков $AN$ и $BK$ делит отрезок $KB$?

***Ответы.*** **4.** 7. **5.** 3. **6**. $\sqrt{7}$. **7.** $30°$. **8.** 85°. **9.** 1:2. **10.** $4:5$.

Рассмотрим задачи на доказательство и вычисление.

**Пример 1.** *Треугольник ABC вписан в окружность радиуса* 12. *Известно, что* $AB=6$ *и* $BC=4$.

а) *Доказать, что треугольник* $ABC$ *– тупоугольный.*

б) *Найти AC, если в треугольнике ABC угол B тупой.*

***Решение.*** а) Используя теорему синусов, найдем

$$\sin A=\frac{BC}{2R}=\frac{1}{6},\ \sin C=\frac{AB}{2R}=\frac{1}{4}.$$

Пусть углы $A$ и $C$ острые. Тогда они меньше $30°$, так как $\frac{1}{6}<\frac{1}{4}<\frac{1}{2}=\sin 30°$. Значит, угол $B$ больше $120°$, то есть является тупым. Отсюда следует, что все три угла треугольника не могут быть одновременно острыми.

б) Так как $\angle B=180°-\angle A-\angle C$, то

$$\sin\angle B=\sin\ 180°-(\angle A+\angle C)\ =$$
$$=\sin(\angle A+\angle C).$$

Из условия следует, что углы $A$ и $C$ треугольника $ABC$ острые. Тогда

$$\cos\angle A=\frac{\sqrt{35}}{6},\ \cos\angle C=\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Используя формулу синуса суммы, получим

$$\sin\angle B=\sin(\angle A+\angle C)=$$
$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}+\frac{\sqrt{35}}{6}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{35}+\sqrt{15}}{24}.$$

Искомую величину находим по формуле

$$AC=2R\sin B=$$
$$=24\cdot\frac{\sqrt{35}+\sqrt{15}}{24}=\sqrt{35}+\sqrt{15}.$$

***Ответ***: $\sqrt{35}+\sqrt{15}$.

**Пример 2.** *Точки* $M, K$ *и* $N$ *лежат на сторонах соответственно AB, BC и AC треугольника ABC, причем AMKN – параллелограмм, площадь которого составляет* $\frac{4}{9}$ *площади треугольника ABC.*

а) *Доказать, что существует два положения точки* $K$, *удовлетворяющих условию задачи.*

б) *Для каждого такого положения точки K найти диагональ MN паралле-*

*лограмма* $AMKN$, *если* $AB=21$, $AC=12$ *и* $\angle BAC=120°$.

***Решение.*** а) Пусть площадь треугольника $ABC$ равна $S$, а $\frac{BK}{BC}=k$. Тогда треугольники $MBK$ и $ABC$ подобны с коэффициентом подобия $k$, а треугольники $NKC$ и $ABC$ подобны с коэффициентом подобия $1-k$. Поскольку $S_{ABC}=S_{AMKN}+S_{MBK}+S_{NKC}$, то имеем

$$S=\frac{4}{9}S+k^2S+(1-k)^2S\,;\; k^2-k+\frac{2}{9}=0.$$

Отсюда получаем: $k=\frac{2}{3}$ или $k=\frac{1}{3}$, то есть имеется два положения точки $K$, удовлетворяющих условию задачи.

1. Пусть $k=\frac{2}{3}$ (см. рис. 3*а*), то есть $\frac{BK}{BC}=\frac{2}{3}$ и $\frac{KC}{BC}=\frac{1}{3}$. Тогда $AM = NK=\frac{1}{3}AB=7$, $AN=MK=\frac{2}{3}AC=8$.

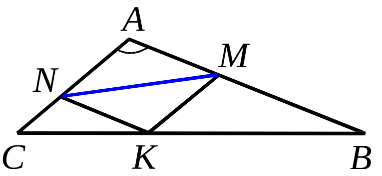



Рис. 3*а*

Используя теорему косинусов для треугольника $NAM$, получаем

$$MN=\sqrt{7^2+8^2-2\cdot 7\cdot 8\cdot\cos 120°}=13.$$

2. Пусть $k=\frac{1}{3}$ (см. рис. 3*б*), то есть

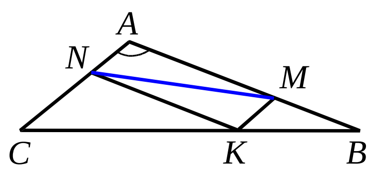



Рис. 3*б*

$\frac{BK}{BC}=\frac{1}{3}$ и $\frac{KC}{BC}=\frac{2}{3}$. Тогда $AM=NK=\frac{2}{3}AB=14$, $AN=MK=\frac{1}{3}AC=4$,

$$MN=\sqrt{14^2+4^2-2\cdot 14\cdot 4\cdot\cos 120°}=2\sqrt{67}.$$

***Ответ***: 13 или $2\sqrt{67}$.

## Задачи для самостоятельного решения

**1.** Точка $D$ делит сторону $AC$ в отношении $AD:DC=1:2$.

а) Докажите, что в треугольнике $ABD$ найдется медиана, равная одной из медиан треугольника $DBC$.

б) Найдите длину этой медианы в случае, если $AB=7$, $BC=8$ и $AC=9$.

**2.** В треугольнике $ABC$ на биссектрисе $BD$ выбрана точка $K$. Через точку $K$ проведены прямые $CK$ и $AK$, пересекающие стороны $AB$ и $BC$ в точках $F$ и $E$ соответственно. Отношение площадей треугольников $ABE$ и $AEC$ равно отношению сторон $AB$ и $AC$.

а) Докажите, что $CF$ – биссектриса угла $ACB$.

б) Найдите длину отрезка $FE$, если $AC=2$, $BC=4$ и $\angle ACB=\arccos\frac{11}{16}$.

**3 (Лидер, 2013/14).** В треугольнике $ABC$ проведены медианы $AA_1$ и $BB_1$, причем $\angle CAA_1=\angle CBB_1$.

а) Докажите, что $AC=BC$.

б) Найдите длину $AB_1$, если радиус описанной окружности вокруг четырехугольника $ABA_1B_1$ равен $\frac{9}{8}\sqrt{34}$, а $\sin\angle CAA_1=\frac{8}{3\sqrt{34}}$.

**4.** В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ и перпендикулярная к $AB$, пересекает сторону $CD$ в точке $M$.

а) Докажите, что $EM$ – медиана треугольника $CED$.

б) Найдите длину $EM$, если $AD=8$, $AB=4$ и $\angle CDB=60°$.

**5 (МИОО, 14.11.13).** Биссектриса угла $ADC$ параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую $AB$ в точке $E$. В треугольник $ADE$ вписана окружность, касающаяся стороны $AE$ в точке $K$ и стороны $AD$ в точке $T$.

а) Докажите, что прямые $KT$ и $DE$ параллельны.

б) Найдите угол $BAD$, если известно, что $AD = 6$ и $KT = 3$.

***Ответы*: 1.** $2\sqrt{5}$. **2.** $\dfrac{\sqrt{34}}{5}$. **3.** 9 или $\dfrac{\sqrt{306}}{4}$. **4.** $2\sqrt{15}$. **5.** $60°$.

### *Равенство и подобие треугольников*

Признаки равенства треугольников:

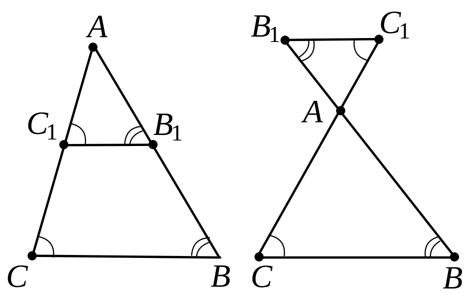
- первый признак – *по двум сторонам и углу между ними*;
- второй признак – *по стороне и двум прилежащим углам*;
- третий признак – *по трем сторонам.*

Подобие треугольников – важный технический прием решения задач, который достаточно часто применяется для вычислений, связанных с пропорциональными отрезками и площадями. Все соответственные угловые величины подобных треугольников равны, все соответственные линейные величины отличаются в $k$ раз, где $k$ – коэффициент подобия, а площади – в $k^2$ раз.

Признаки подобия треугольников:

- первый признак – *по двум углам*;
- второй признак – *по двум пропорциональным сторонам и углу между ними*;
- третий признак – *по трем пропорциональным сторонам*.

**Методические указания.** Необходимо научить учащихся распознавать стандартные конфигурации, связанные с подобными треугольниками. Приведем основные из них.

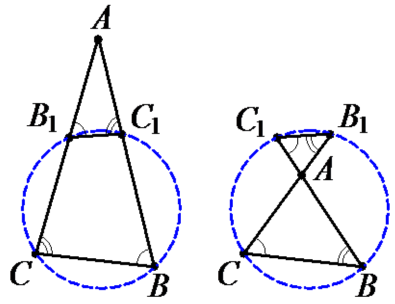



*а* *б*

Рис. 4

1. Фалесово подобие (см. рис. 4 *а*, *б*; $BC \parallel B_1C_1$). Такое подобие часто возникает в задачах, связанных с параллелограммом или трапецией. На рис. 4 треугольники $ABC$ и $AB_1C_1$ подобны.

2. Подобие в конфигурации «угол со сторонами, пересекающими окружность».




*а* *б*

Рис. 5

Из этого подобия следуют теоремы о секущих, о пересекающихся хордах окружности. На рис. 5 треугольники $ABC$ и $AB_1C_1$ подобны. На рис. 5*а* четырехугольник с вершинами в точках пересечения сторон угла и окружности является вписанным.

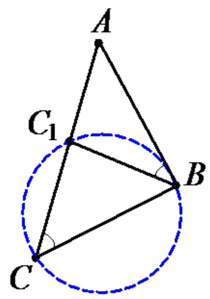
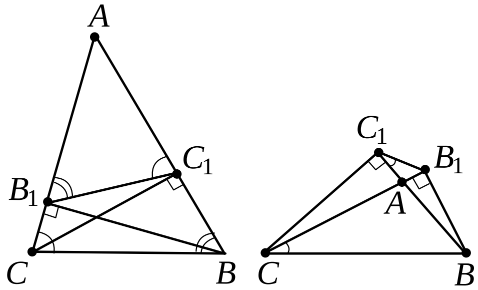



Рис. 6

Касательная – предельное положение секущей (см. рис. 6). В этом случае из подобия треугольников $ABC$ и $AC_1B$ следует теорема о секущей и касательной.

3. Треугольник $AB_1C_1$, образованный основаниями двух высот и вершиной (см. рис. 7, $BB_1$, $CC_1$ – высоты треугольника $ABC$), подобен треугольнику $ABC$.




*а* *б*

Рис. 7

*Задачи на доказательство*

**1.** Докажите, что диагонали трапеции вместе с основаниями образуют два подобных треугольника.

**2.** Для прямоугольного треугольника $ABC$ построен ему симметричный треугольник $ABC_1$ относительно гипотенузы $AB$. Пусть точка $M$ – середина высоты $C_1D$ треугольника $ABC_1$ и $N$ – середина стороны $BC$ треугольника $ABC$. Докажите, что треугольник $AMN$ подобен треугольнику $ABC$.

**3.** Точки $M$ и $N$ являются соответственно серединами сторон $CD$ и $BC$ параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые $AM$ и $AN$ делят диагональ $BD$ на три равные части.

**4.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ из вершины прямого угла проведена высота $CD$. Точки $M$ и $N$ делят соответственно стороны $AC$ и $CB$ в равных отношениях (считая от вершин $A$ и $C$). Докажите, что треугольник $DMN$ подобен данному треугольнику.

**5.** В треугольнике $ABC$ проведены медианы $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$, пересекающиеся в точке $M$. Точки $P$, $Q$ и $R$ являются соответственно серединами отрезков $AM$, $BM$ и $CM$. Через точки $P$, $Q$ и $R$ проведены соответственно прямые, параллельные сторонам $BC$, $AC$, $AB$. Докажите, что в пересечении этих прямых образуется треугольник, равный треугольнику $ABC$.

*Задачи на вычисление*

**6**. Средняя линия равнобедренного треугольника, параллельная основанию, равна 4 *см*. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 18 *см*.

**7.** Прямая, параллельная основанию треугольника с площадью 108 *см*$^2$, отсекает от него треугольник с площадью 12 *см*$^2$. Найдите площадь четырехугольника, три вершины которого совпадают с вершинами малого треугольника, а четвертая лежит на основании большего треугольника.

**8.** В треугольник со сторонами 10, 17 и 21 *см* вписан прямоугольник с периметром 24 *см* так, что одна из его сторон лежит на большей стороне треугольника. Найдите стороны прямоугольника.

**9.** В прямоугольный треугольник вписан квадрат, имеющий с ним общий угол. Найдите площадь квадрата, если катеты треугольника равны 10 *м* и 15 *м*.

**10.** В треугольнике $ABC$ стороны $AB$ = 14 *см*, $AC$ = 18 *см*, угол $A$ вдвое больше угла $B$. Найдите третью сторону треугольника.

***Ответы***: **6.** 8 *см*, 5 *см*, 5 *см*. **7.** 36 *см*$^2$. **8.** $\dfrac{72}{13}$ и $\dfrac{84}{13}$ *см*. **9.** 36 *м*$^2$. **10.** 24 *см*.

Рассмотрим задачу на доказательство и вычисление.

**Пример 3.** *Точки* $A_1$, $B_1$, $C_1$ *– основания высот остроугольного треугольника* $ABC$.

а) *Доказать, что треугольники* $A_1BC_1$, $A_1B_1C$ *и* $AB_1C_1$ *подобны треугольнику* $ABC$.

б) *Найти углы треугольника* $ABC$, *если углы треугольника* $A_1B_1C_1$ *равны* 90°, 60° *и* 30°.

***Решение.*** а) Так как треугольник $ABC$ – остроугольный, то его высоты пересекаются в точке $H$, лежащей внутри треугольника, а основания высот $A_1$, $B_1$, $C_1$ лежат на сторонах треугольника (см. рис. 8). Докажем, что треугольник $A_1BC_1$ подобен треугольнику $ABC$.

Рассмотрим прямоугольные треугольники $BAA_1$ и $BCC_1$. Угол $B$ у них общий.

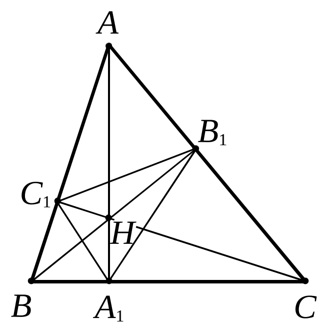



Рис. 8

Следовательно, они подобны и $\dfrac{BA_1}{BC_1}=\dfrac{AB}{BC}$. Отсюда получаем $\dfrac{BA_1}{AB}=\dfrac{BC_1}{BC}$.

Так как треугольники $A_1BC_1$ и $ABC$ содержат общий угол $B$ и их соответственные стороны, заключающие этот угол, пропорциональны, то по второму признаку они подобны и $\angle BC_1A_1 = \angle BCA$, а $\angle BA_1C_1 = \angle BAC$.

Аналогично предыдущему доказываются остальные случаи подобных треугольников.

б) Найдем угол $C$ треугольника $ABC$. Из доказанного выше имеем:

$$\angle BC_1A_1 = \angle BCA, \ \angle AC_1B_1 = \angle BCA.$$

Развернутый угол при вершине $C_1$ составлен из суммы углов $BC_1A_1$, $AC_1B_1$ и $B_1C_1A_1$. Отсюда получаем соотношение

$$2\angle BCA + \angle B_1C_1A_1 = 180° \quad \text{или}$$

$$\angle BCA = 90° - \frac{1}{2}\angle B_1C_1A_1.$$

Такие же равенства можно получить для других острых углов. Используя данные в условии задачи углы, имеем:

$$90° - \frac{1}{2}\cdot 90° = 45°, \ 90° - \frac{1}{2}\cdot 60° = 60°,$$

$$90° - \frac{1}{2}\cdot 30° = 75°.$$

***Ответ***: 45°, 75°, 60°.

**Пример 4.** *Две окружности разного радиуса касаются внешним образом в точке $B$. Через точку $B$ проведена прямая, пересекающая второй раз меньшую окружность в точке $A$, а большую – в точке $C$.*

а) *Доказать, что треугольники $AO_2B$ и $O_1BC$ подобны, где $O_1$ и $O_2$ – центры большей и меньшей окружностей соответственно.*

б) *Найти $BC$, если радиусы окружностей равны 2 и 4, а $AC = 3\sqrt{2}$.*

***Решение.*** а) Так как треугольники $AO_2B$ и $O_1BC$ равнобедренные (см. рис. 9) и $\angle O_2BA = \angle O_1BC$, то они подобны по первому признаку подобия.

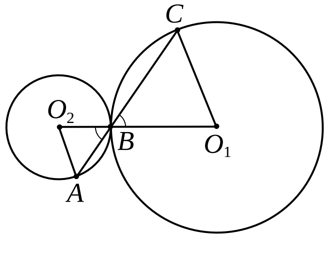



Рис. 9

б) Для подобных треугольников $AO_2B$ и $O_1BC$ можем записать

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BO_2}{BO_1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда $BC = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

***Ответ***: $2\sqrt{2}$.

## Задачи для самостоятельного решения

**1.** Через вершины $A$ и $B$ треугольника $ABC$ проведена окружность, пересекающая стороны $BC$ и $AC$ в точках $D$ и $E$ соответственно.

а) Докажите подобие треугольников $CAB$ и $CDE$.

б) Найдите $DE$ и радиус данной окружности, если $AB = 4$, $\angle C = 45^\circ$, площадь треугольника $CDE$ в 7 раз меньше площади четырехугольника $ABDE$.

**2.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ $(\angle C = 90°)$ проведена высота $CD$. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники $ACD$ и $BCD$, равны 0,6 и 0,8.

**а)** Докажите подобие треугольников $ACD$ и $BCD$, $ACD$ и $ABC$.

**б)** Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник $ABC$.

**3. (ЕГЭ, 05.06.2014)** Высоты $BB_1$ и $CC_1$ остроугольного треугольника $ABC$ пересекаются в точке $H$.

а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.

б) Найдите $BC$, если $AH = 21$ и $\angle BAC = 30°$.

**4. (ЕГЭ, 05.06.2014)** В остроугольном треугольнике $ABC$ провели высоту $BH$. Из точки $H$ на стороны $AB$ и $BC$ опустили перпендикуляры $HK$ и $HM$ соответственно.

а) Докажите, что треугольник $MBK$ подобен треугольнику $ABC$.

б) Найдите отношение площади треугольника $MBK$ к площади четырехугольника $AKMC$, если $BH = 2$, а радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$, равен 4.

**5.** Продолжение медианы $AE$ треугольника $ABC$ пересекает описанную около треугольника окружность в точке $D$.

а) Докажите подобие треугольников $BCD$ и $DEC$, если $AC = DC$.

б) Найдите длину отрезка $BC$, если длина каждой из хорд $AC$ и $DC$ равна 1.

***Ответы.*** **1.** $\sqrt{2}$, $R=\sqrt{5}$. **2.** 1. **3.** $7\sqrt{3}$. **4.** $\frac{1}{15}$. **5.** $\sqrt{2}$.

### *Площадь треугольника*

Полезно помнить пять основных формул для вычисления площади треугольника

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}ab\sin\angle C=pr=\frac{abc}{4R}=$$
$$=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $r$ и $R$ – радиусы соответственно вписанной и описанной окружностей треугольника, $p=\frac{a+b+c}{2}$ – полупериметр.

Эти формулы важны сами по себе, а также при использовании метода площадей.

Полезно также помнить, что отношение площадей подобных треугольников равно квадрату отношения соответствующих линейных величин этих треугольников.

**Методические указания.** В качестве подготовительных задач можно предложить следующие.

*Задачи на доказательство.*

**1.** Докажите, что если точка $M$ лежит на стороне $BC$ треугольника $ABC$, то площади треугольников $AMB$ и $AMC$ пропорциональны отрезкам $BM$ и $CM$, то есть $\frac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta AMC}}=\frac{BM}{CM}$.

**2.** Докажите, что если прямая пересекает стороны $AB$ и $AC$ треугольника $ABC$ в точках $P$ и $Q$ соответственно, то

$$\frac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{AP}{AB}\cdot\frac{AQ}{AC}.$$

**3.** Докажите, что если площади двух прямоугольных треугольников относятся как квадраты гипотенуз, то эти треугольники подобны.

**4.** Внутри прямоугольного треугольника $ABC$ ($\angle C=90°$) выбрана точка $O$ так, что площади треугольников $AOB$, $BOC$ и $AOC$ равны. Докажите, что

$$OA^2+OB^2=5OC^2.$$

*Задачи на вычисление.*

**5.** Стороны треугольника равны 7, 24 и 25. Найдите его высоты.

**6.** В треугольнике $ABC$ на стороне $AC$ взята точка $B_1$ так, что $AB_1$: $B_1C$ = 2:3. Найдите площадь треугольника $BB_1C$, если $S_{ABC}=30$.

**7.** На сторонах $CA$, $AB$, $BC$ треугольника $ABC$ соответственно взяты точки $M$, $N$, $P$ так, что $\frac{AN}{AB}=m$, $\frac{BP}{BC}=n$, $\frac{AM}{AC}=k$. Найдите площадь треугольника $MNP$, если площадь треугольника $ABC$ равна $S$.

**8.** Определите площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и $\sqrt{15}$ *см*, а медиана третьей стороны равна 2 *см*.

**9.** (**ЕГЭ**, **2005**). В прямоугольном треугольнике $ABC$ с прямым углом $C$ проведена биссектриса $BK$. Найдите площадь треугольника $CBK$, если площадь треугольника $ABC$ равна 18, а синус угла $A$ равен 0,8.

**10.** Точка $M$ лежит внутри равностороннего треугольника на расстоянии $3\sqrt{3}$ от двух его сторон и на расстоянии $4\sqrt{3}$ от третьей стороны. Найдите длину стороны данного треугольника.

***Ответы***: **5.** 7; 24; $\frac{168}{25}$. **6.** 18. **7.** $S_{\Delta MNP}=$ $=S(mn-mk+k-nk)$. **8.** $\frac{\sqrt{15}}{2}$ $см^2$. **9.** 8. **10.** 20. *Указание.* Используйте метод площадей.

Рассмотрим задачи на доказательство и вычисление.

**Пример 5.** *Окружность, вписанная в треугольник* $ABC$, *касается его средней линии, параллельной стороне* $BC$.

а) *Доказать, что* $AC+AB=3BC$.

б) *Найти большую сторону треугольника* $ABC$, *если известно, что его площадь равна* 36 *и* $BC=9$.

***Решение.*** а) Пусть точки $M$ и $N$ – середины сторон $AB$ и $AC$ соответственно (см. рис. 10). Тогда $MN=\frac{1}{2}BC$.

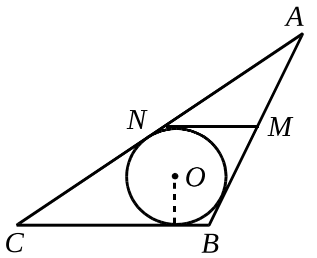



Рис. 10

В трапецию $BMNC$ вписана окружность, поэтому

$$CN + BM = BC + MN = \frac{3}{2}BC.$$

Отсюда $AC + AB = 3BC$.

б) Обозначим $AB = x$, $AC = y$, $p-$ полупериметр треугольника $ABC$. Тогда

$$x + y = AB + AC = 3BC = 27;$$

$$p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{x + y + 9}{2} = 18.$$

По формуле Герона

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)} =$$
$$= \sqrt{18(18 - x)(18 - y)(18 - 9)} =$$
$$= 9\sqrt{2(18 - x)(18 - y)} = 36.$$

Получаем уравнение

$$\sqrt{2(18 - x)(18 - y)} = 4.$$

Возводя обе его части в квадрат и учитывая равенство $x + y = 27$, имеем

$$(18 - x)(18 - y) = 8,$$
$$(18 - x)(18 - 27 + x) = 8$$
$$x^2 - 27x + 170 = 0.$$

Отсюда находим, что $x = 10$ или $x = 17$. Получаем $y = 17$ при $x = 10$ и $y = 10$ при $x = 10$. Это означает, что условию задачи соответствует треугольник со сторонами 10, 17, 9. Наибольшая сторона равна 17.

***Ответ***: 17.

**Пример 6.** *Площадь треугольника $ABC$ равна* 10; *площадь треугольника $AHB$, где $H$ – точка пересечения высот, равна* 8. *На прямой $CH$ взята такая точка $K$, что треугольник $ABK$ – прямоугольный.*

а) *Доказать, что* $S^2_{ABK} = S_{ABC} \cdot S_{AHB}$.

б) *Найти площадь треугольника* $ABK$.

***Решение***. а) Пусть $AM, BP$ и $CN$ – высоты треугольника $ABC$ (см. рис. 11).

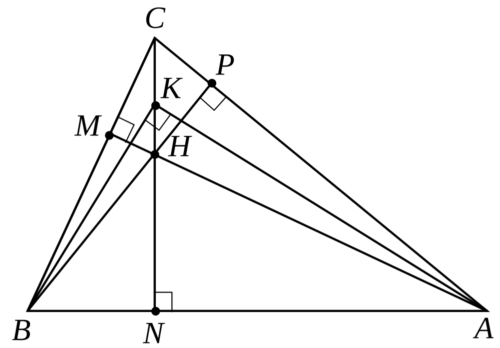



Рис. 11

Используя для вычисления площадей треугольников формулы

$$S_{ABK} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot KN, \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CN \text{ и}$$

$$S_{AHB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot HN$$

получаем, что для доказательства требуемого равенства достаточно доказать равенство $KN^2 = CN \cdot NH$.

Поскольку в прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу, то $KN^2 = BN \cdot AN$ (∗).

Заметим, что $\angle CAN = \angle CHP = = \angle BHN$. Тогда подобны прямоугольные треугольники $CNA$ и $BHN$. Отсюда получаем

$$\frac{CN}{BN} = \frac{NA}{HN} \text{ или } CN \cdot HN = BN \cdot NA.$$

Заменяя множители в правой части равенства (∗), получаем доказываемое равенство, то есть $KN^2 = CN \cdot NH$, из которого следует $S^2_{ABK} = S_{ABC} \cdot S_{AHB}$.

В случае, когда точка $K$ лежит вне треугольника $ABC$, доказательство проводится аналогично.

б) Учитывая, что ранее доказано, что $S^2_{ABK} = S_{ABC} \cdot S_{AHB}$ и по условию $S_{ABC} = 10$, $S_{AHB} = 8$, получаем $S_{ABK} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

***Ответ:*** $4\sqrt{5}$.

## Задачи для самостоятельного решения

**1.** Окружность, вписанная в треугольник $ABC$, касается его средней линии, параллельной стороне $BC$.

а) Докажите, что $AC+AB=3BC$.

б) Найдите меньшую из сторон $AB$ и $AC$ треугольника $ABC$, если известно, что его площадь равна 28,5 и $BC=9{,}5$.

**2. (МИОО).** В треугольнике $ABC$ проведены биссектрисы $AA_1$ и $CC_1$. Точки $K$ и $M$ – основания перпендикуляров, опущенных из точки $B$ на прямые $AA_1$ и $CC_1$.

а) Докажите, что $MK \parallel AC$.

б) Найдите площадь треугольника $KBM$, если известно, что $AC=13$, $BC=5$ и $AB=12$.

**3.** Высоты треугольника *ABC*, где $\angle BAC=45°$ и $AB=12\sqrt{2}$, пересекаются в точке $H$ и $CH=4\sqrt{2}$, а медианы – в точке $M$.

а) Докажите, что отрезок $MH$ параллелен $AC$.

б) Найдите площадь треугольника $CBK$, где точка $K$ – середина $MH$.

**4.** В треугольнике $ABC$ на сторонах $AB$, $BC$ и $CA$ соответственно отложены отрезки

$$AD=\frac{1}{3}AB,\ BE=\frac{1}{3}BC,\ CF=\frac{1}{3}CA.$$

а) Докажите, что $S_{AMC}=S_{ANB}=S_{BKC}$, где $M=AE\cap CD$, $K=CD\cap BF$, $N=AE\cap BF$.

б) Найдите, какую часть от площади треугольника $ABC$ составляет площадь треугольника $MNK$.

**5.** На каждой стороне равностороннего треугольника взято по точке. Стороны треугольника с вершинами в этих точках соответственно перпендикулярны сторонам исходного треугольника.

а) Докажите, что треугольник с вершинами в указанных точках также равносторонний.

б) Найдите отношение площади этого треугольника к площади исходного.

***Ответы***: **1.** 10. **2.** $\frac{30}{13}$. **3.** 24. **4.** $\frac{1}{7}$. **5.** $1:3$.

### *Медианы, высоты и биссектрисы треугольника*

Высоты треугольника пересекаются в одной точке (ее называют ***ортоцентром треугольника***).

Медианы треугольника пересекаются в одной точке (ее называют ***центром тяжести или центроидом треугольника***), и точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины угла.

Медиана $m_c$ треугольника, проведенная из вершины $C$, вычисляется по формуле: $m_c^2=\frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2)$.

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в этот треугольник.

Биссектриса $l_c$ треугольника, проведенная из вершины $C$, вычисляется по формулам:

$$l_c=\frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b} \quad \text{или} \quad l_c^2=ab-c_ac_b,$$

где $c_a$ и $c_b$ – отрезки, на которые биссектриса делит сторону $c$.

**Теорема о биссектрисе**: $\frac{c_a}{c_b}=\frac{a}{b}$.

**Методические указания.** В качестве подготовительных задач можно предложить следующие.

*Задачи на доказательство.*

**1.** Докажите, что длина стороны треугольника по известным трем медианам вычисляется по формуле:

$$a=\frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2+2m_c^2-m_a^2}.$$

**2**. Биссектриса треугольника делит его на два треугольника, в которые вписаны окружности. Докажите, что если радиусы этих окружностей равны, то треугольник равнобедренный.

**3.** Докажите, что:

а) в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная из вершины прямого угла равна половине гипотенузы;

б) если медиана, проведенная из вершины некоторого угла треугольника равна половине противоположной ему стороны, то этот угол – прямой.

**4.** На гипотенузу $AB$ прямоугольного треугольника $ABC$ опущена высота $CH$. В треугольнике $ACH$ проведена биссектриса $CE$. Докажите, что $BE = BC$.

**5.** Докажите, что если $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ – высоты остроугольного треугольника $ABC$ (см. рис. 12), то:
а) $\Delta AHB_1 \sim \Delta BHA_1$; б) $\Delta BA_1H \sim \Delta BB_1C$;
в) $\Delta AB_1H \sim \Delta BB_1C$; г) $\Delta AA_1C \sim \Delta BB_1C$;

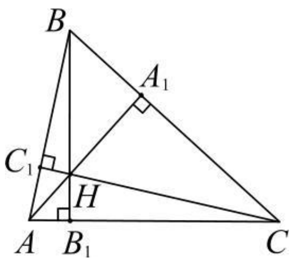



Рис. 12

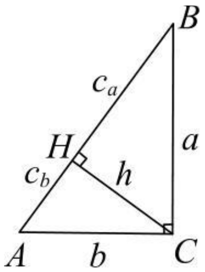



Рис. 13

**6.** Докажите соотношения, связанные с высотой прямоугольного треугольника, проведенной из вершины прямого угла (см. рис. 13): 1) $h_c^2 = a_c \cdot b_c$; 2) $a^2 = c \cdot a_c$; $b^2 = c \cdot b_c$; 3) $h_c = \dfrac{a \cdot b}{c}$, где $a_c$, $b_c$ – проекции катетов $a$ и $b$ на гипотенузу $c$; $h_c$ – высота, опущенная на гипотенузу.

*Задачи на вычисление.*

**7.** (**ЕГЭ**, **2003**). В треугольнике $ABC$ проведена медиана $AM$. Найдите площадь треугольника $ABC$, если $AC = 3\sqrt{2}$, $BC = 10$, $\angle MAC = 45°$.

**8.** На стороне $BC$ остроугольного треугольника $ABC$ ($AB \neq BC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту $AD$ в точку $M$. Найдите $AH$, если $AD = 85$, $MD = 68$, а $H$ – точка пересечения высот треугольника $ABC$.

**9.** Одна из биссектрис треугольника делится точкой пересечения биссектрис в отношении 25:1, считая от вершины. Найдите периметр треугольника, если длина стороны треугольника, к которой эта биссектриса проведена, равна 17.

**10.** В равнобедренном треугольнике основание равно 8, высота к основанию равна 3. Найдите расстояние между точкой пересечения медиан и точкой пересечения биссектрис треугольника.

***Ответы:*** **7.** 21. **8.** 30,6. **9.** 442. **10.** $\dfrac{1}{3}$.

Рассмотрим задачу на доказательство и вычисление.

**Пример 7.** *Медианы $AA_1, BB_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $O$. Известно, что $AC = 3OB$.*

а) *Доказать, что треугольник $ABC$ прямоугольный.*

б) *Найти сумму квадратов медиан $AA_1$ и $CC_1$, если $AC = 10$.*

***Решение***. а) Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершины. Значит $BB_1 = \dfrac{3}{2}BO = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{3}AC = \dfrac{1}{2}AC$ (см. рис. 14). Отсюда получаем, что треугольники $AB_1B$ и $CB_1B$ равнобедренные, причем $\angle B_1AB = \angle ABB_1$ и $\angle B_1CB = \angle CBB_1$.

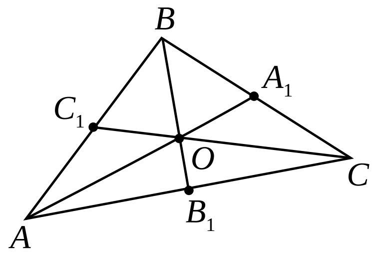



Рис. 14

Сумма этих четырех углов равна $180°$. Значит $\angle ABC = \angle ABB_1 + \angle CBB_1 = 90°$. Отсюда следует, что треугольник $ABC$ прямоугольный.

б) Треугольник $A_1BA$ прямоугольный. Поэтому $AA_1^2 = A_1B^2 + BA^2 = \dfrac{1}{4}CB^2 + BA^2.$

Аналогично из прямоугольного треугольника $C_1BC$ находим:

$$CC_1^2 = C_1B^2 + BC^2 = \frac{1}{4}AB^2 + BC^2.$$

Складывая полученные равенства, имеем:

$$AA_1^2 + CC_1^2 = \frac{5}{4}BA^2 + \frac{5}{4}BC^2 =$$

$$= \frac{5}{4}(BA^2 + BC^2) = \frac{5}{4}AC^2 = 125.$$

***Ответ***: 125.

**Пример 8.** *В треугольнике* $ABC$ *с углом* $B$, *равным* $120°$, *проведены биссектрисы* $AA_1$, $BB_1$ *и* $CC_1$.

а) *Доказать, что треугольник* $A_1B_1C_1$ – *прямоугольный*.

б) *Найти угол* $B_1C_1C$.

***Решение***. а) Пусть точка $D$ лежит на продолжении стороны $AB$ (см. рис. 15). Так как $\angle ABB_1 = \angle CBB_1 = \angle DBC = 60°$, то $BC$ – биссектриса угла $DBB_1$.

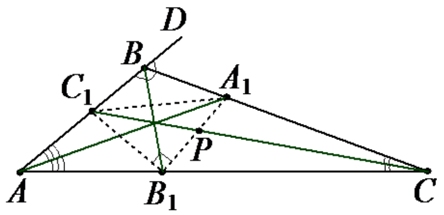



Рис. 15

Точка $A_1$ (точка пересечения биссектрис $AA_1$ и $BC$) – центр вневписанной окружности, касающейся стороны $BB_1$ и продолжений сторон $AB$ и $AB_1$ треугольника $ABB_1$. Отсюда $B_1A_1$ – биссектриса угла $BB_1C$. Аналогично получаем, что $C_1$ – центр вневписанной окружности, касающейся стороны $BB_1$ и продолжений сторон $CB$ и $CB_1$ треугольника $BB_1C$. Поэтому $B_1C_1$ – биссектриса угла $BB_1A$. Значит, $\angle A_1B_1C_1 = 90°$.

б) В треугольнике $BB_1C$ точку пересечения биссектрис углов $B_1$ и $C$ обозначим через $P$. Тогда

$$\angle B_1PC = 90° + \frac{\angle B_1BC}{2} = 120°.$$

Так как для прямоугольного треугольника $PB_1C_1$ угол $B_1PC$ является внешним, то $\angle B_1C_1C = 120° - 90° = 30°$.

***Ответ***: $30°$.

**Пример 9 (МИОО)**. *Дан треугольник* $ABC$ *со сторонами* $AB = 4$, $BC = 5$ *и* $AC = 6$.

а) *Доказать, что прямая, проходящая через точку пересечения медиан и центр вписанной окружности, параллельна стороне* $BC$.

б) *Найти длину биссектрисы треугольника* $ABC$, *проведенной из вершины* $A$.

***Решение.*** а) Полупериметр $p$ треугольника $ABC$ равен $p = \frac{4+5+6}{2} = \frac{15}{2}$ (см. рис. 16). По формуле Герона найдем площадь $S$ треугольника $ABC$ $S = \sqrt{\frac{15}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$. Отсюда по формуле $r = \frac{S}{p}$ находим радиус вписанной в треугольник $ABC$ окружности $r = \frac{15\sqrt{7}}{4} : \frac{15}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Следовательно, центр $O$ этой окружности находится на расстоянии $\frac{\sqrt{7}}{2}$ от стороны $BC$.

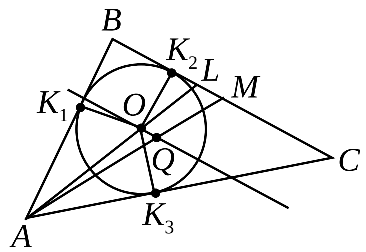



Рис. 16

Пусть $Q$ – точка пересечения медиан. Высота, опущенная из вершины $A$ на сторону $BC$, равна

$$h = \frac{2S}{BC} = \frac{2\cdot 15\sqrt{7}}{4\cdot 5} = \frac{3\sqrt{7}}{2}.$$

Так как медиана $AM$ делится точкой $Q$ в отношении $2:1$, считая от вершины $A$, то расстояние от точки $Q$ до стороны $BC$ равно $\frac{1}{3}h = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Поскольку точки $O$ и $Q$ находятся на одинаковом расстоянии от стороны $BC$, то прямая $OQ$ параллельна стороне $BC$.

б) Прямая $OQ$ отсекает от треугольника $ABC$ подобный ему треугольник с коэффициентом подобия $\frac{2}{3}$. В этом треугольнике $AO$ есть биссектриса, которую можно найти, например, по теореме Пифагора для прямоугольного треугольника $AK_1O$, где $K_1$ – точка касания вписанной окружности стороны $AB$.

Найдем отрезок $AK_1$:

$$AK_1 = p_{ABC} - BC = \frac{15}{2} - 5 = 2{,}5.$$

Тогда

$$AO = \sqrt{AK_1^2 + OK_1^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{7}{4}} = 2\sqrt{2}$$

и биссектриса $AL = \frac{3}{2}AO = 3\sqrt{2}$.

***Ответ***: $3\sqrt{2}$.

**Пример 10 (ЕГЭ, 08.05.14).** *В равнобедренном треугольнике $ABC$ с углом $120°$ при вершине $A$ проведена биссектриса $BD$. В треугольник $ABC$ вписан прямоугольник $DEFH$ так, что сторона $FH$ лежит на отрезке $BC$, а вершина $E$ – на отрезке $AB$.*

а) *Доказать, что $FH = 2DH$.*

б) *Найти площадь прямоугольника $DEFH$, если $AB = 4$.*

***Решение***. а) В равнобедренном треугольнике $ABC$ $\angle B = \angle C = 30°$. Пусть $AC = AB = a$ (см. рис. 17). Высота $AM$ является биссектрисой и медианой. Тогда

$$AM = CA\sin\angle C = \frac{1}{2}a,$$

$$CB = 2CM = 2CA\cos\angle C = \sqrt{3}\cdot a.$$

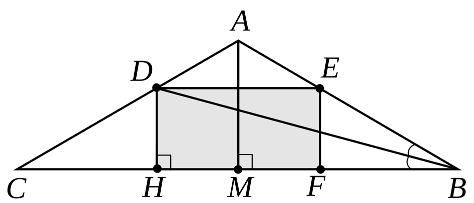



Рис. 17

Из теоремы о биссектрисе следует $\frac{CD}{DA} = \frac{CB}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$. Отсюда

$$CD = \sqrt{3}DA,\ \frac{DA}{CA} = \frac{DA}{CD + DA} = \frac{1}{1+\sqrt{3}},$$

$$DA = \frac{a}{1+\sqrt{3}},\ CD = \frac{\sqrt{3}a}{1+\sqrt{3}}.$$

Тогда из прямоугольного треугольника $CDH$ получаем

$$DH = CD\sin\angle C = \frac{1}{2}CD = \frac{\sqrt{3}a}{2(1+\sqrt{3})}.$$

Треугольники $ABC$ и $AED$ подобны ($DE \parallel CB$) $\frac{DE}{CB} = \frac{DA}{CA} = \frac{1}{1+\sqrt{3}}$. Тогда

$$FH = DE = \frac{CB}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}a}{1+\sqrt{3}} = 2DH.$$

б) Площадь прямоугольника $DEFH$ найдем по формуле:

$$S_{DEFH} = DH\cdot DE = \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(1+\sqrt{3})}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}a}{1+\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4+2\sqrt{3}}\cdot a^2 = \frac{12}{2+\sqrt{3}} = 12(2-\sqrt{3}).$$

***Ответ***: $24 - 12\sqrt{3}$.

## Задачи для самостоятельного решения

**1.** Медианы $AM$ и $BN$ треугольника $ABC$ перпендикулярны и пересекаются в точке $P$.

а) Докажите, что $CP = AB$.

б) Найдите площадь треугольника $ABC$, если известно, что $AC = 3$ и $BC = 4$.

**2.** Медианы $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $M$. Известно, что $AB = 3MC$.

а) Докажите, что треугольник $ABC$ прямоугольный.

б) Найдите длину отрезка $DN$, где $D$ – точка касания $AC$ и вписанной в треугольник $ABC$ окружности, $N$ – точка касания стороны $AC$ и окружности, касающейся стороны $AC$ и продолжений сторон $BA$ и $BC$ треугольника $ABC$, если известно, что $AC = 6$, $BC = 8$.

**3.** В треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $BB_1$. В образовавшиеся треугольники $ABB_1$ и $CBB_1$ вписаны окружности, которые касаются отрезка $BB_1$ в одной и той же точке. Расстояние между центрами этих окружностей в 3 раза меньше стороны $AC$.

а) Докажите что треугольник $ABC$ равнобедренный.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник $ABC$, если его площадь равна 96.

**4.** В треугольнике $ABC$ $AC=12$, $AB=BC=10$. Биссектриса угла $BAC$ пересекает сторону $BC$ в точке $D$ и описанную около треугольника окружность в точке $P$.

а) Докажите, что $\angle ABP=\angle BDP$.

б) Найдите отношение площадей треугольников $ADB$ и $BDP$.

**5.** Медиана $AM$ и высота $CH$ равнобедренного треугольника $ABC$ $(AB=BC)$ пересекаются в точке $K$. Известно, что $CK=5$, $KH=1$.

а) Докажите, что $AH:BH=1:4$.

б) Найдите площадь треугольника $ABC$.

***Ответы***: **1.** $\sqrt{11}$. **2.** 2. **3.** $3\sqrt{2}$. **4.** $\frac{96}{25}$. **5.** 30.

### *Треугольник и окружности*

С каждым треугольником связаны описанная, вписанная и три вневписанных окружности.

- Центр окружности, вписанной в треугольник, совпадает с точкой пересечения биссектрис. Ее радиус находится по формуле $r=\frac{S}{p}$, где $S$ и $p$ – площадь и полупериметр треугольника соответственно; для прямоугольного треугольника $r=\frac{a+b-c}{2}$ $(\angle C=90°)$; для равностороннего треугольника со стороной $a$ $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$; $r=\frac{R}{2}$.

- Центр окружности, описанной около треугольника, совпадает с точкой пересечения серединных перпендикуляров. Ее радиус находится по формуле $R=\frac{abc}{4S}$ или $R=\frac{ab}{2h_c}$, $R=\frac{a}{2\sin\angle A}$; для прямоугольного треугольника $R=\frac{c}{2}$; $R=m_c$ $(\angle C=90°)$; для равностороннего треугольника $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$; $R=2r$.

- Центр вневписанной окружности треугольника совпадает с точкой пересечения биссектрис внешних углов при вершинах стороны, которой она касается, и биссектрисы внутреннего угла треугольника при вершине, противоположной этой стороне. Их радиусы находятся по формулам:

$$r_a=\frac{S}{p-a},\ r_b=\frac{S}{p-b},\ r_c=\frac{S}{p-c}.$$

**Методические указания.** В качестве подготовительных задач можно предложить следующие.

*Задачи на доказательство.*

**1.** Пусть радиус окружности вписанной в данный прямоугольный треугольник с катетами $a$ и $b$, равен $r$, а радиус описанной окружности $R$. Докажите, что $a+b=2(R+r)$.

**2.** Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна произведению отрезков, на которые делит гипотенузу точка касания вписанной окружности.

**3.** Докажите, что центр описанной около треугольника окружности, лежит вне этого треугольника в том и только том случае, когда треугольник тупоугольный.

**4.** Пусть $A_1$, $B_1$ и $C_1$ – точки касания вневписанных окружностей соответственно сторон $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$ треугольника $ABC$. Докажите, что:

а) $AB_1=p-c$;  б) $AB_1+AC_1=a$.

**5.** Докажите формулу для вычисления отрезков касательных (см. рис. 18):

$$x=\frac{b+c-a}{2}=p-a.$$

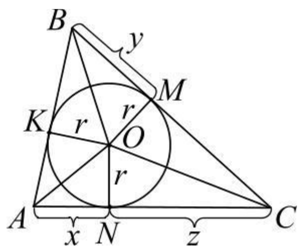



Рис. 18

*Задачи на вычисление.*

**6.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с основанием $AC$ вписанная окружность касается боковой стороны $BC$ в точке $Q$, отрезок $AQ$ пересекает вписанную окружность в точке $P$. Найти площадь треугольника $ABC$, если известно, что $AC = 15$, $PQ = 1$.

**7.** Две касающиеся внешним образом в точке $K$ окружности, радиусы которых равны 22 и 33, касаются сторон угла с вершиной $A$. Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку $K$, пересекает стороны угла в точках $B$ и $C$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$.

**8.** (**ЕГЭ**, **2002**). В равнобедренном треугольнике боковая сторона делится точкой касания с вписанной окружностью в отношении $8:5$, считая от вершины, лежащей против основания. Найдите основание треугольника, если радиус вписанной окружности равен 10.

**9.** (**ЕГЭ**, **2003**). Высоты $AH$ и $BK$ остроугольного треугольника $ABC$ пересекаются в точке $M$, $\angle AMB = 105°$. Найдите градусную меру угла $ABO$, где $O$ – центр окружности, описанной около треугольника $ABC$.

**10.** (**ЕГЭ**, **2004**). Треугольник $BMP$ с углом $B$, равным $45°$, вписан в окружность радиуса $6\sqrt{2}$. Найдите длину медианы $BK$, если луч $BK$ пересекает окружность в точке $C$ и $CK = 3$.

***Ответы***: **6.** $\dfrac{3\sqrt{11}}{4}$. **7.** $\dfrac{275}{4}$. **8.** 30. **9.** $150°$. **10.** 12.

Рассмотрим задачи на доказательство и вычисление.

**Пример 11.** *В треугольнике $ABC$ точка $D$ лежит на продолжении отрезка $BC$ за точку $B$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников $ADC$ и $ADB$, касаются стороны $AD$ в точках $E$ и $F$.*

а) *Доказать, что расстояние от вершины треугольника до точки касания окружности сторон, содержащих эту вершину, равно разности полупериметра треугольника и противолежащей ей стороны.*

б) *Найти длину отрезка $EF$, если $AB = 12$, $BC = 5$, $CA = 10$ и $BD : DC = 4:9$.*

***Решение***. а) См. задачу 6 на доказательство (см. рис. 18).

б) Точка $D$ лежит вне отрезка $BC$ (см. рис. 19). Пусть $AD = d$, $BD = x$, $DC = y$. Тогда для окружности, вписанной в треугольник $ADC$, имеем $DE = \dfrac{d + y - 10}{2}$, а для окружности, вписанной в треугольник $ADB$, $DF = \dfrac{d + x - 12}{2}$.

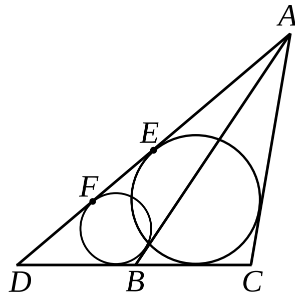



Рис. 19

По условию $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{x}{x+5} = \dfrac{4}{9}$, тогда $x = 4$, $y = 4 + 5 = 9$. Значит,

$$EF = |\,DE - DF\,| =$$

$$= \left| \frac{d+9-10}{2} - \frac{d+4-12}{2} \right| = 3{,}5.$$

***Замечание.*** Так как в решении не исследовано расположение точек $E$ и $F$ на отрезке $AD$, то при вычислении длины отрезка $EF$ использован знак модуля.

***Ответ:*** $3{,}5$.

**Пример 12.** *В треугольник $ABC$ с углом $C$, равным $90°$, вписана окружность. Вторая окружность, лежащая вне треугольника, касается стороны $BC$ и продолжений двух других сторон.*

а) *Доказать, что треугольник $OCO_a$ прямоугольный, где $O$ и $O_a$ – центры вписанной и вневписанной окружностей соответственно.*

б) *Найти $OO_a$, если угол $A$ равен $60°$, а радиус вписанной окружности равен $r$.*

***Решение.*** Пусть вписанная и вневписанная окружности касаются прямой $AC$ в точках $B_2$ и $B_1$ соответственно (см. рис. 20).

а) Так как $CO$ и $CO_a$ – биссектрисы, делящие пополам прямые углы $ACB$ и $B_1CB$, то угол $OCO_a$ прямой.

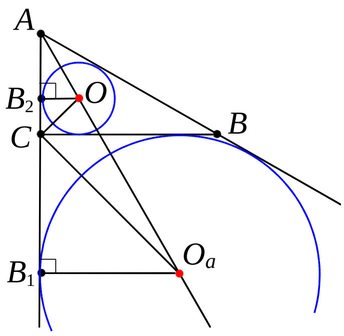



Рис. 20

б) В прямоугольном треугольнике $B_1AO_a$ угол $B_1O_aA$ равен $60°$, в прямоугольном треугольнике $CB_1O_a$ $\angle B_1O_aC = \angle B_1CO_a = 45°$. Тогда в прямоугольном треугольнике $OCO_a$ $\angle OO_aC = 60° - 45° = 15°$.

Так как $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$,

то $OO_a = \dfrac{OC}{\sin 15°} = 2r(\sqrt{3} + 1)$.

***Ответ***: $2r(\sqrt{3}+1)$.

**Пример 13 (МИОО 24.09.13).** *В треугольник $ABC$ вписана окружность радиуса $R$, касающаяся стороны $AC$ в точке $D$, причём $AD = R$.*

а) *Доказать, что треугольник $ABC$ прямоугольный.*

б) *Вписанная окружность касается сторон $AB$ и $BC$ в точках $E$ и $K$ соответственно. Найти площадь треугольника $BEK$, если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.*

***Решение.*** а) Пусть $O$ – центр вписанной в треугольник $ABC$ окружности.

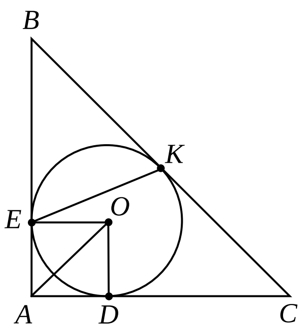



Рис. 21

Треугольник $AOD$ прямоугольный и равнобедренный $AD = DO = R$ (см. рис. 21). Следовательно, $\angle DAO = 45°$. Так как центр вписанной в угол окружности лежит на биссектрисе этого угла, то $AO$ – биссектриса угла $A$ и $\angle OAE = \angle DAO = 45°$. Значит $\angle CAB = 90°$.

б) Пусть $BK = x$. По теореме о равенстве отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, $AE = AD = 5$, $CK = CD = 15$ и $BE = BK = x$. Тогда $BC = 15 + x$, $AB = 5 + x$ и $AC = 20$. По теореме Пифагора для треугольника $ABC$ имеем $BC^2 = AB^2 + AC^2$, или

$$(15 + x)^2 = (5 + x)^2 + 20^2.$$

Отсюда $x = 10$. Тогда

$$BC = 25, \ \sin\angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta BEK} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot BK \cdot \sin\angle ABC =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5} = 40.$$

***Ответ***: 40.

**Пример 14.** *Высоты остроугольного треугольника $ABC$ пересекаются в точке $H$.*

а) *Доказать, что радиусы окружностей, описанных около треугольников $ABC$, $ABH$, $BCH$, $ACH$ равны.*

б) *Найти угол $ACB$, если известно, что отрезок $CH$ равен радиусу окружности, описанной около треугольника $ABC$.*

***Решение.*** а) Так как в четырехугольнике $AEHD$ углы $E$ и $D$ прямые (см. рис. 22), то $\angle A + \angle DHE = 180°$. Отсюда получаем $\angle BHC = \angle DHE = 180° - \angle A$. Радиус окружности, описанной около треугольника $BHC$, равен

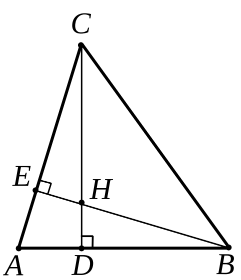



Рис. 22

$$\frac{BC}{2\sin(180^\circ - \angle A)} = \frac{BC}{2\sin\angle A} = \frac{a}{2\sin\alpha}.$$

Значит радиусы окружностей, описанных около треугольников $ABC$ и $BCH$ равны между собой. Аналогично доказывается для других треугольников.

б) Пусть $R$ – радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$. Так как радиусы окружностей, описанных около треугольников $ABC$ и $BCH$ равны между собой, то для треугольника $BCH$ имеем

$CH = 2R\sin\angle HBC$, т.е. $R = 2R\sin\angle HBC$.

Отсюда $\sin\angle HBC = \frac{1}{2}$. Значит, $\angle HBC = 30^\circ$ (треугольник $ABC$ остроугольный).

Из треугольника $BEC$ находим $\angle C = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

***Ответ***: $60^\circ$.

## Задачи для самостоятельного решения

**1.** Точка $N$ на стороне $BC$ является основанием высоты треугольника $ABC$. Окружность, описанная около треугольника $ANC$, пересекает отрезок $AB$ в точке $M$, отличной от точек $A$ и $B$.

а) Докажите, что $\angle BAC = \angle BNM$.

б) Найдите $MN$, если $AC = 2$, $AB = 3$, $AM : AB = 2:5$.

**2. (С-Петербург, 15.04.14).** Окружность с центром $O$, вписанная в треугольник $ABC$, касается стороны $BC$ в точке $P$ и пересекает отрезок $BO$ в точке $Q$. При этом отрезки $OC$ и $QP$ параллельны.

а) Докажите, что треугольник $ABC$ – равнобедренный треугольник.

б) Найдите площадь треугольника $BQP$, если точка $O$ делит высоту $BD$ треугольника в отношении $BO:OD = 3:1$ и $AC = 2a$.

**3. (МИОО, 16.05.14, 10 класс).** В треугольник $ABC$ вписана окружность радиуса $R$, касающаяся стороны $AC$ в точке $D$, причём $AD = R$.

а) Докажите, что треугольник $ABC$ прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон $AB$ и $BC$ в точках $E$ и $F$. Найдите площадь треугольника $BEF$, если известно, что $R = 2$ и $CD = 10$.

**4.** Основание и боковая сторона равнобедренного треугольника равны 26 и 38 соответственно.

а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная основанию, пересекает окружность, вписанную в треугольник.

б) Найдите длину отрезка этой средней линии, заключенного внутри окружности.

**5.** Вневписанная окружность равнобедренного треугольника касается его боковой стороны.

а) Докажите, что радиус этой окружности равен высоте треугольника, опущенной на основание.

б) Найдите отношение, в котором боковая сторона треугольника делится точкой касания с вписанной окружностью, если ее радиус в пять раз меньше радиуса вневписанной окружности, касающейся этой же стороны.

***Ответы***: **1.** $\frac{18}{\sqrt{145}}$. **2.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$. **3.** $\frac{54}{13}$. **4.** 5. **5.** 1:3.

## § 2. Окружности

***Свойства дуг, хорд и углов окружности***

Если хорды равноудалены от центра окружности, то они равны, и наоборот.

Бóльшая из двух хорд находится ближе к центру окружности.

Если диаметр делит хорду пополам, то он перпендикулярен ей, и наоборот.

Равные дуги стягиваются равными хордами.

Дуги, заключенные между параллельными хордами, равны.

Вписанные углы, опирающиеся на:

- одну и ту же дугу, равны;
- диаметр, прямые.
- одну и ту же хорду, вершины которых лежат по одну сторону от этой хорды, равны;
- одну и ту же хорду, вершины которых лежат по разные стороны хорды, составляют в сумме $180°$.

**Теорема** (*о хордах*). Если хорды $AB$ и $CD$ окружности пересекаются в точке $K$, то справедливо равенство $AK \cdot KB = CK \cdot KD$.

**Методические указания.** В качестве подготовительных задач можно предложить следующие.

*Задачи на доказательство.*

**1.** Угол $ABC$ вписан в окружность. Докажите, что биссектриса этого угла делит дугу $AC$ пополам.

**2.** Докажите, что угол между касательной и хордой окружности, проведенной из точки касания, измеряется половиной дуги, стягиваемой этой хордой.

**3.** Вершины четырехугольника расположены на окружности. Докажите, что сумма двух противоположных углов этого четырехугольника равна $180°$.

**4.** На окружности взяты четыре произвольные точки. Докажите, что прямые, соединяющие середины противоположных дуг, взаимно перпендикулярны.

**5.** В окружности с центром $O$ проведен диаметр; $A$ и $B$ – точки окружности, расположенные по одну сторону от этого диаметра. На диаметре взята точка $M$ такая, что $AM$ и $BM$ образуют равные углы с диаметром. Докажите, что $\angle AOB = \angle AMB$.

*Задачи на вычисление.*

**6.** Точки $A$, $B$, $C$ и $D$ делят окружность на части, отношение которых $1:3:5:6$. Найдите углы между касательными к окружности, проведенными в точках $A$, $B$, $C$ и $D$.

**7.** Найдите углы четырехугольника $ABCD$, вершины которого расположены на окружности, если $\angle ABD = 74°$, $\angle DBC = 38°$, $\angle BDC = 65°$.

**8.** Окружность проходит через вершины $A$ и $C$ треугольника $ABC$, пересекая сторону $AB$ в точке $E$ и сторону $BC$ в точке $F$. Угол $AEC$ в 5 раз больше угла $BAF$, а угол $ABC$ равен $72°$. Найдите радиус окружности, если $AC = 6$.

**9.** Диаметр $CD$ параллелен хорде $AB$ той же окружности. Найдите длину хорды $AB$, если $AC = b$ и $BC = a$ $(a > b)$.

**10.** В треугольнике $ABC$ угол $ABC$ равен $\alpha$, угол $BCA$ равен $2\alpha$. Окружность, проходящая через точки $A$, $C$ и центр описанной около треугольника $ABC$ окружности, пересекает сторону $AB$ в точке $M$. Найдите отношение $AM$ к $AB$.

***Ответы*: 6.** $36°$; $60°$; $108°$; $156°$. **7.** $\angle ABC = 112°$; $\angle BCD = 77°$; $\angle CDA = 68°$; $\angle DAB = 103°$. **8.** 3. **9.** $\dfrac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. **10.** $\dfrac{1}{4\cos^2\alpha}$.

Рассмотрим задачи на доказательство и вычисление.

**Пример 15.** *На основании $BC$ трапеции $ABCD$ взята точка $E$, лежащая на одной окружности с точками $A, C$ и $D$. Другая окружность, проходящая через точки $A, B$ и $C$, касается прямой $CD$.*

а) *Доказать, что треугольник $ACD$ подобен треугольнику $ABE$.*

б) *Найти $BC$, если $AB = 12$ и $BE : EC = 4:5$.*

***Решение*.** а) Вписанный угол $ABC$ и угол $ACD$ между хордой $AC$ и касательной к окружности $CD$ опираются на одну дугу (см. рис. 23). Следовательно, они равны, т.е. $\angle ABE = \angle ACD$.

Поскольку трапеция $AECD$ ($AD \parallel EC$) вписана в окружность, то она – равнобедренная. Значит, ее углы при основаниях равны $\angle ADC = \angle DAE$. Также $\angle BEA = \angle EAD$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых. Тогда $\angle BEA = \angle DAE$.

Следовательно, треугольники $ACD$ и $ABE$ подобны по первому признаку.

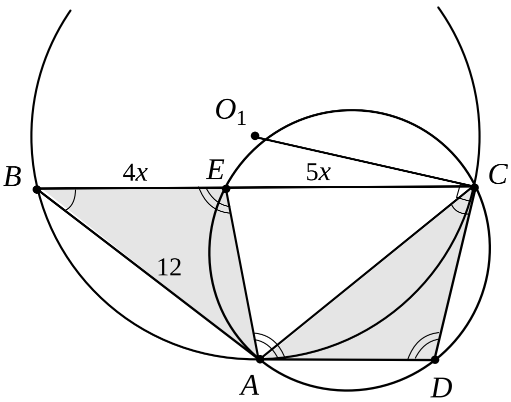



Рис. 23

б) Заметим, что треугольники $ABE$ и $ABC$ также подобны по первому признаку, поскольку угол $B$ у них общий, а $\angle BCA = \angle CAD$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых, т.е. $\angle BCA = \angle BAE$. Записывая отношение сторон этих треугольников, лежащих против равных углов, получаем $\frac{BA}{BC} = \frac{BE}{BA}$ или $\frac{12}{9x} = \frac{4x}{12}$. Отсюда находим $x = 2$. Значит, $BC = 9x = 18$.

***Ответ***. 18.

**Пример 16** (**МИОО**). *Окружность, построенная на стороне $AD$ параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.*

а) *Доказать*, что *$ABCD$ – ромб.*

б) *Эта окружность пересекает сторону $AB$ в точке $M$, причем $AM : MB = 1 : 2$. Найти диагональ $AC$, если $AD = 2\sqrt{3}$.*

***Решение.*** а) Так как $E$ – точка пересечения лежит на окружности, и угол $AED$ опирается на диаметр $AD$, то $\angle AED = 90°$ (см. рис. 24). Значит, диагонали параллелограмма $ABCD$ перпендикулярны. Следовательно, $ABCD$ – ромб.

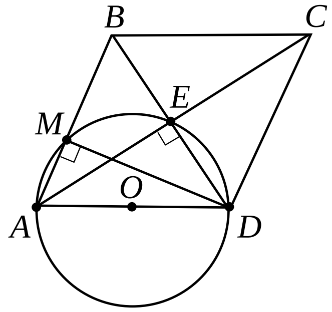



Рис. 24

б) Все стороны ромба $ABCD$ равны, поэтому $AB = AD = 2\sqrt{3}$. Тогда $AM = \frac{1}{3}AB = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Треугольник $AMD$ прямоугольный, поскольку вписанный угол $AMD$ опирается на диаметр $AD$. Тогда из прямоугольного треугольника $AMD$ находим $\cos\angle A = \frac{AM}{AD} = \frac{1}{3}$. Поскольку в ромбе $ABCD$ сумма смежных углов равна $180°$, то $\cos\angle D = -\cos\angle A = -\frac{1}{3}$. Тогда по теореме косинусов для треугольника $ACD$ находим $AC^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos\angle D = 32$, т.е. $AC = 4\sqrt{2}$.

***Ответ***: $4\sqrt{2}$.

## Задачи для самостоятельного решения

**1 (Лидер, 2013/14).** Две окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ пересекаются в точках $A$ и $P$. Через точку $A$ к окружности $\omega_1$ проведена касательная $AB$, а через точку $P$ – прямая $CD$, параллельная $AB$ (точки $B$ и $C$ лежат на окружность $\omega_2$, точка $D$ – на окружности $\omega_1$).

а) Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

б) В треугольнике $ABC$ высота, опущенная на $AB$ из вершины $C$, равна 6, $BC = 8$. Найдите радиус окружности $\omega_1$.

**2 (Лидер, 2013/14).** Две окружности пересекаются в точках $M$ и $Q$. Через точку $M$ проведена касательная $MA$ к первой окружности, а через точку $Q$ прямая $KL$, параллельная $MA$ (точки $A$ и $L$ лежат на второй окружности, точка $K$ – на первой.

а) Докажите, что $AL \parallel KM$.

б) Известно, что $MQ = 8$, и в параллелограмме $AMKL$ синус острого угла равен 0,8. Найдите площадь треугольника $KMQ$.

**3.** Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке $E$, $AB = AD$, $CA$ – биссектриса угла $C$.

а) Докажите, что четырехугольник $ABCD$ вписанный.

б) Найдите угол $CDB$, если $\angle BAD = 140°$, $\angle BEA = 110°$.

**4.** Диагональ $AC$ прямоугольника $ABCD$ с центром $O$ образует со стороной $AB$ угол $30°$. Точка $E$ лежит вне прямоугольника, причем $\angle BEC = 120°$.

а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.

б) Прямая $OE$ пересекает сторону $AD$ прямоугольника в точке $K$. Найдите $EK$, если известно, что $BE = 40$ и $CE = 24$.

**5.** В окружности проведены хорды $AC$ и $BD$, пересекающиеся в точке $E$, причем касательная к окружности, проходящая через точку $C$, параллельна $BD$.

**а)** Докажите подобие треугольников $BAE$ и $CDE$, $CDE$ и $CAD$.

**б)** Найдите площадь треугольника $CDE$, если известно, что $AB : BE = 3:1$ и $S_{ADC} = 18$.

***Ответы***: **1.** $\frac{16}{3}$. **2.** 30,72. **3.** $50°$. **4.** 113. **5.** 2.

### *Секущие и касательные*

Если к окружности из одной точки проведены две касательных, то длины отрезков касательных от этой точки до точек касания с окружностью равны.

**Теорема** (*о секущей и касательной*). Если к окружности из одной точки $A$ проведены касательная $AB$ и секущая, пересекающая окружность в точках $C$ и $D$, то справедливо равенство

$$AB^2 = AC \cdot AD.$$

**Теорема** (*о секущих*). Если к окружности из одной точки $A$ проведены две секущих, пересекающие соответственно окружность в точках $B$, $C$ и $D$, $E$, то справедливо равенство

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE.$$

**Методические указания.** В качестве подготовительных задач можно предложить следующие.

*Задачи на доказательство.*

**1.** Докажите, что длина отрезка внешней касательной к двум окружностям, заключенного между общими внутренними касательными, равна длине общей внутренней касательной.

**2.** Расстояние между центрами непересекающихся окружностей равно $a$. Докажите, что четыре точки пересечения общих внешних касательных с общими внутренними касательными лежат на одной окружности радиуса $\frac{a}{2}$.

**3.** К двум окружностям касающимся внешним образом в точке $P$, проведена общая внешняя касательная $BC$. Докажите, что угол $BPC$ – прямой.

**4.** Дана окружность и точка $P$ вне ее; $PB$ и $PC$ – касательные к окружности. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник $PBC$ лежит на данной окружности.

**5.** Две окружности имеют единственную общую точку $M$. Через эту точку проведены две секущие, пересекающие одну окружность в точках $A$ и $A_1$, а другую – в точках $B$ и $B_1$. Докажите, что $AA_1 \parallel BB_1$.

*Задачи на вычисление.*

**6.** К двум окружностям радиусов 6 и 3 проведена общая касательная. Найдите расстояние между точками касания, если расстояние между центрами окружностей равно 15, для:

а) внутренней касательной;

б) внешней касательной.

**7.** На стороне $BA$ угла $ABC$, равного 30°, взята такая точка $D$, что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки $A$, $D$ и касающейся луча $BC$.

**8.** Окружности радиусов 4 и 9 касаются внешним образом, лежат по одну сторону от некоторой прямой и касаются этой прямой. Найдите радиус окружности, касающейся каждой из двух данных и той же прямой.

**9.** Прямая касается окружностей радиусов $R$ и $r$. Известно, что расстояние между их центрами равно $a$, причем $R > r$ и $a > r + R$. Найдите расстояние между точками касания.

**10.** Из внешней точки проведены к окружности секущая длиной 12 и касательная, длина которой составляет $\frac{2}{3}$ внутреннего отрезка секущей. Найдите длину касательной.

***Ответы***: **6.** а) $6\sqrt{6}$; б) 12. **7.** 1. **8.** 1,44 или 36. **9.** $\sqrt{a^2-(R\pm r)^2}$. **10.** 6.

**Пример 17. (Демоверсия 2014).** *Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй – в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.*

а) *Доказать, что прямые AD и BC параллельны.*

б) *Найти площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны* 4 *и* 1.

***Решение***. а) Обозначим центры окружностей $O_1$ и $O_2$ соответственно (см. рис. 25). Пусть общая касательная, проведённая к окружностям в точке *K*, пересекает *AB* в точке *M*. По свойству касательных, проведённых из одной точки, $MA = MK$ и $MK = MB$.

Треугольник *AKB*, у которого медиана равна половине стороны, к которой она проведена, – прямоугольный. Вписанный угол *AKD* прямой, поэтому он опирается на диаметр *AD*. Значит, $AD \perp AB$. Аналогично получаем, что $BC \perp AB$. Следовательно, прямые *AD* и *BC* параллельны.

б) Пусть, для определенности, первая окружность имеет радиус 4, а радиус второй равен 1.

Треугольники *BKC* и *AKD* подобны, поэтому $\frac{AD}{BC} = 4$. Пусть $S_{BKC} = S$, тогда $S_{AKD} = 16S$.

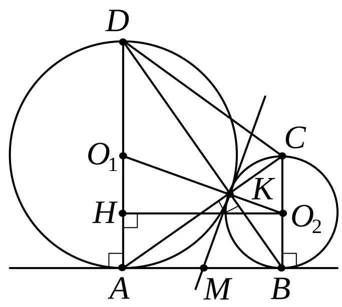


Рис. 25

У треугольников *AKB* и *BKC* общая высота и $AK : KC = 4:1$, следовательно, $\frac{S_{AKB}}{S_{BKC}} = \frac{AK}{KC}$, то есть $S_{AKB} = 4S$.

Аналогично, $S_{CKD} = 4S$.

Площадь трапеции *ABCD* равна 25*S*.

Вычислим площадь трапеции *ABCD*. Проведём к *AD* перпендикуляр $O_2H$, равный высоте трапеции, и найдём его из прямоугольного треугольника $O_2HO_1$:

$$O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = \sqrt{(4+1)^2-(4-1)^2} = 4.$$

Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2}\cdot AB = \frac{8+2}{2}\cdot 4 = 20.$$

Следовательно, $25S = 20$. Отсюда $S = 0{,}8$ и $S_{AKB} = 4\cdot 0{,}8 = 3{,}2$.

***Ответ***: 3,2.

**Пример 18.** *Окружности* $\omega_1$ *и* $\omega_2$ *радиусов* $R$ *и* $r$ ($R > r$) *соответственно касаются внешним образом в точке* $A$. *Через точку* $B$, *лежащую на окружности* $\omega_1$, *проведена прямая, касающаяся окружности* $\omega_2$ *в точке* $M$.

а) *Доказать, что отношение отрезков прямой* $AB$, *отсекаемых окружностями, равно отношению их радиусов.*

б) *Найти* $BM$, *если известно, что* $AB = a$.

***Решение.*** а) Продолжим *AB* до пересечения с окружностью $\omega_2$ в точке $E$ (см. рис. 26). Треугольники $AO_1B$ и $AO_2E$

равнобедренные и подобные, так как $\angle O_1AB = \angle EAO_2$. Следовательно, $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{r}{R}$.

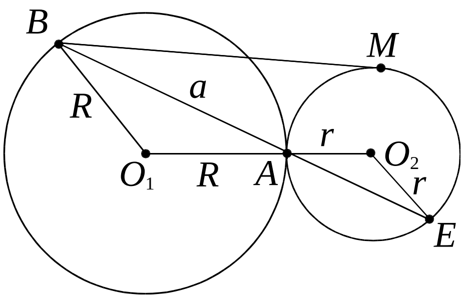



Рис. 26

б) Подставляя в последнее отношение $AB = a$, находим $AE = \dfrac{ar}{R}$. По теореме о секущей и касательной имеем

$$BM^2 = BA \cdot BE,$$

$$BM^2 = BA \cdot (BA + AE),$$

$$BM^2 = a \cdot \left(a + \frac{ar}{R}\right),$$

$$BM = \sqrt{a \cdot \left(a + \frac{ar}{R}\right)} = a \cdot \sqrt{1 + \frac{r}{R}}.$$

***Ответ***: $a \cdot \sqrt{1 + \dfrac{r}{R}}$.

## Задачи для самостоятельного решения

**1.** Окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ радиусов $R$ и $r$ ($R > r$) соответственно касаются внутренним образом в точке $A$. Через точку $B$, лежащую на окружности $\omega_1$, проведена прямая, касающаяся окружности $\omega_2$ в точке $M$.

а) Докажите, что отношение отрезков прямой $AB$, отсекаемых окружностями, равно отношению их радиусов.

б) Найдите $BM$, если известно, что $AB = a$.

**2 (Лидер, 2013/14).** Две окружности, касающиеся прямой в точках $A$ и $B$, пересекаются в точках $C$ и $D$, причем $AB = 8$, $CD = 15$, при этом $C$ ближе к $AB$, чем $D$.

а) Докажите, что прямая $CD$ делит отрезок $AB$ пополам.

б) Найдите медиану $CE$ треугольника $ABC$.

**3.** Окружность с центром $O$ вписана в угол равный $60°$. Окружность бóльшего радиуса с центром в $O_1$ также вписана в этот угол и проходит через точку $O$.

а) Докажите, что радиус второй окружности вдвое больше радиуса первой.

б) Найдите длину общей хорды этих окружностей, если известно, что радиус первой окружности равен $2\sqrt{15}$.

**4.** Две окружности с центрами $O_1$ и $O_2$ касаются общей внешней касательной в точках $B$ и $C$ соответственно и сами касаются внешним образом в точке $A$.

а) Докажите подобие треугольников $ABD$ и $ACO_2$, $ACD$ и $ABO_1$, где $D$ – точка пересечения внутренней касательной и внешней касательной $BC$.

б) Найдите радиусы окружностей, если хорды $AB = 8$ и $AC = 6$.

**5.** На сторонах острого угла $ABC$ взяты точки $A$ и $C$. Одна окружность касается прямой $AB$ в точке $B$ и проходит через точку $C$. Вторая окружность касается прямой $BC$ в точке $B$ и проходит через точку $A$. Точка $D$ – вторая общая точка окружностей.

а) Докажите подобие треугольников $ABD$ и $BCD$.

б) Найдите $AD$, если $AB = a$, $CD = b$, $BC = c$.

***Ответ***: **1.** $a \cdot \sqrt{1 - \dfrac{r}{R}}$. **2.** 1. **3.** 15. **4.** $\dfrac{15}{4}$, $\dfrac{20}{3}$. **5.** $b\left(\dfrac{a}{c}\right)^2$.

### *Взаимное расположение окружностей*

**Методические указания.** Взаимное расположение окружностей можно различать по внешнему признаку (касающиеся, пересекающиеся, непересекающиеся) или по внутреннему признаку (взаимное расположение центров окружностей относительно общей касательной, общей хорды и т.д.).

При решении задач на касающиеся окружности полезно напомнить учащимся следующие факты (см. рис. 27).

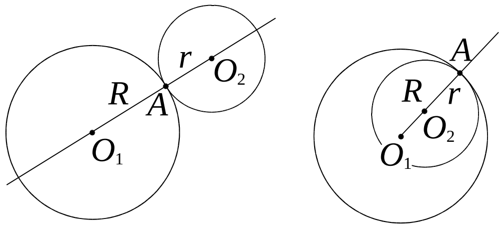



Рис. 27

- *При любом способе касания точка касания и центры окружностей лежат на одной прямой.*
- *При внешнем касании центры окружностей расположены на линии центров по разные стороны от точки касания, при внутреннем – по одну сторону.*
- *Расстояние между центрами касающихся окружностей радиусов $R$ и $r$ ($R \geq r$) равно $R+r$ при внешнем касании и $R-r$ при внутреннем.*

В случае пересекающихся окружностей возможны два варианта расположения центров окружностей относительно их общей хорды (см. рис. 28*а* и 28*б*).

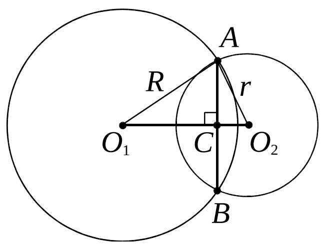



Рис. 28*а*

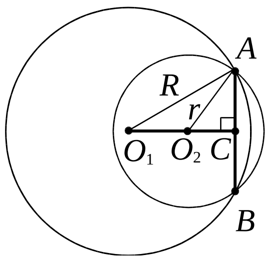


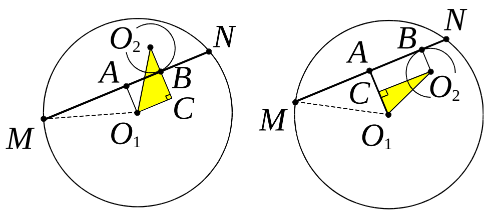

Рис. 28*б*

При решении подобных задач полезно напомнить учащимся следующие факты.

- *Пересекающиеся окружности в точках A и B имеют общую хорду AB.*
- *Общая хорда перпендикулярна линии центров и делится ею пополам.*

В задачах о расположении меньшей окружности внутри другой и касающейся хорды окружности большего радиуса (см. рис. 29) полезно напомнить учащимся следующее.

- *Вычисления расстояния между центрами окружностей сводятся к применению теоремы Пифагора в треугольнике $O_1O_2C$, при этом расстояние $O_1A$ находится из теоремы Пифагора для треугольника $MAO_1$* (см. рис. 29 *а*, *б*).




*а* *б*

Рис. 29

**Методические указания.** В качестве подготовительных задач можно предложить следующие.

*Задачи на доказательство*

**1.** Через точку *A* общей хорды *AB* двух окружностей проведена прямая, пересекающая первую окружность в точке *C*, а вторую – в точке *D*. Касательная к первой окружности в точке *C* и касательная ко второй окружности в точке *D* пересекаются в точке *M*. Докажите, что точки *M*, *C*, *B* и *D* лежат на одной окружности.

**2.** Две равные окружности касаются внешним образом в точке *M*. Секущая, параллельная линии центров, пересекает окружности последовательно в точках *A*, *B*, *C* и *D*. Докажите, что величина угла *AMC* не зависит от выбора секущей.

**3.** Две окружности пересекаются в точках *A* и *B*. Точки *A* и *B* лежат по разные стороны от прямой $l$, которая пересекает окружности соответственно в точках *C*, *D*, *E* и *M*. Докажите, что сумма углов $DBE$ и $CAM$ равна $180°$.

*Задачи на вычисление.*

**4.** Найдите отрезок общей внешней касательной к двум окружностям радиусов $r$ и $R$, касающихся внешним образом.

**5.** Две окружности радиусов $R$ и $\frac{R}{2}$ касаются друг друга внешним образом. Один из концов отрезка длины $2R$, образующего угол $30°$ с линией центров, совпадает с центром окружности меньшего радиуса. Какая часть отрезка лежит вне окружностей?

**6.** Три окружности касаются внешним образом. Расстояние между центрами окружностей равны 7 *см*, 8 *см* и 9 *см*. Найдите радиусы окружностей.

**7.** Две окружности пересекаются в точках $A$ и $B$, через точку $A$ проведены хорды $AC$ и $AD$, касающиеся данных окружностей; $AC:AD=3:2$. Найдите отношение $BC:BD$.

**8.** Окружности с центрами $O_1$ и $O_2$ пересекаются в точках $A$ и $B$. Найдите радиусы окружностей, если $O_1O_2=a$, $\angle AO_1B=90°$ и $\angle AO_2B=60°$.

**9.** Окружности радиусов 20 и 3 касаются внутренним образом. Хорда $AB$ большей окружности касается меньшей окружности в точке $M$. Найдите длины отрезков $AM$ и $MB$, если $AB=32$.

**10. (ЕГЭ, 2010)** В окружности, радиус которой равен 15, проведена хорда $AB=24$. Точка $C$ лежит на хорде $AB$ так, что $AC:BC=1:2$. Найдите радиус окружности, касающейся данной окружности и хорды $AB$ в точке $C$.

***Ответы*: 4.** $2\sqrt{Rr}$. **5.** $\frac{3-\sqrt{7}}{4}$. **6.** 3; 4 и 5 *см*. **7.** 9:4. **8.** $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$, $\frac{2a}{\sqrt{3}+1}$ или $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$, $\frac{2a}{\sqrt{3}-1}$. **9.** 24 и 8; $16+4\sqrt{13}$ и $16-4\sqrt{13}$. **10.** $\frac{8}{3}$ и $\frac{32}{3}$.

Рассмотрим задачи на доказательство и вычисление.

**Пример 19 (МИОО).** *Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.*

а) *Доказать, что периметр треугольника с вершинами в центрах трех окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.*

б) *Найти радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны* 6 и 2.

***Решение*.** Пусть $AB$ – диаметр большей из трех окружностей, $O$ – ее центр, $O_1$ – центр окружности радиуса $r$, касающейся окружности с диаметром $AB$ в точке $A$, $O_2$ – центр окружности радиуса $R$, касающейся окружности с диаметром $AB$ в точке $C$, окружности с центром $O_1$ – в точке $D$, отрезка $AB$ – в точке $E$ (см. рис. 30).

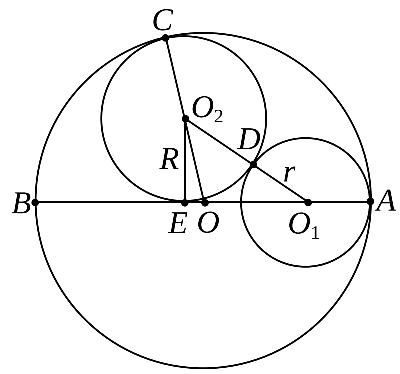



Рис. 30

Точки $O, O_2$ и $C$ лежат на одной прямой, поэтому $OO_2=OC-O_2C=$ $=OC-R$. Аналогично $OO_1=OA-O_1A=$ $=OA-r$ и $O_1O_2=O_1D+O_2D=r+R$. Следовательно, периметр треугольника $OO_1O_2$ равен

$$OO_1+OO_2+O_1O_2=$$
$$=OA-r+OC-R+r+R=2OA.$$

б) Пусть $OA=6, r=2$. Тогда $O_2E=R$, $O_1O_2=2+R$,

$$OO_1=OA-O_1A=6-2=4,$$
$$OO_2=OC-O_2C=6-R.$$

Из прямоугольных треугольников $O_1O_2E$ и $OO_2E$ по теореме Пифагора находим:

$$O_1E=\sqrt{O_1O_2^2-O_2E^2}=$$
$$=\sqrt{(2+R)^2-R^2}=\sqrt{4+4R},$$
$$OE=\sqrt{OO_2^2-O_2E^2}=$$
$$=\sqrt{(6-R)^2-R^2}=\sqrt{36-12R}.$$

Так как $O_1E=OO_1+OE$, то получаем уравнение $\sqrt{4+4R}=4+\sqrt{36-12R}$. Отсюда $R=3$ (это значит, что диаметр искомой окружности равен радиусу наибольшей из трех окружностей, то есть точка $E$ совпадает с точкой $O$).

***Ответ***: 3.

**Пример 20.** *Две окружности пересекаются в точках $A$ и $B$.*

а) *Доказать, что общая хорда $AB$ окружностей перпендикулярна их линии центров.*

б) *Найти расстояние между центрами окружностей, если $AB=16$, а их радиусы равны* 10 *и* 17.

***Решение.*** Отрезок $AB$ – общая хорда данных окружностей. В условии не указано расположение центров окружностей относительно $AB$. Поэтому задача допускает два вида чертежа.

а) Линия центров $O_1O_2$ перпендикулярна хорде $AB$ и делит ее в точке пересечения $C$ пополам (см. рис. 28*а, б*). Это следует из равенства треугольников $O_1AO_2$ и $O_1BO_2$ по трем сторонам и совпадения оснований высот, опущенных из точек $A$ и $B$.

б) Если центры окружностей лежат по разные стороны от их общей хорды $AB$ (см. рис. 28*а*), то из прямоугольных треугольников $O_1AC$ и $O_2AC$ соответственно получаем: $O_1C=\sqrt{17^2-8^2}=15$ и $O_2C=\sqrt{10^2-8^2}=6$.

Искомое расстояние между центрами равно $O_1O_2=O_1C+O_2C=15+6=21$.

Если центры окружностей лежат по одну сторону от хорды $AB$ (см. рис. 28*б*), то, аналогично поступая, находим

$$O_1O_2=O_1C-O_2C=15-6=9.$$

***Ответ***: 21 или 9.

## Задачи для самостоятельного решения

**1.** Три окружности радиусов 2, 4 и 6 касаются друг друга внешним образом.

а) Докажите, что окружность, проходящая через точки касания данных окружностей является вписанной в треугольник с вершинами в их центрах.

б) Найдите радиус этой окружности.

**2.** На диаметре $AB$ полукруга взята точка $C$ и в полукруге на отрезках $AC$ и $CB$ как диаметрах построены два полукруга. Из точки $C$ восставлен перпендикуляр к $AB$ и с обеих сторон (от него) построены два круга, касающиеся как этого перпендикуляра, так и обоих полукругов.

а) Докажите, что радиусы построенных кругов равны.

б) Найдите их радиус, если $AB=12$ и $AC:CD=1:3$.

**3.** Две окружности касаются внешним образом в точке $C$. Общая внешняя касательная касается первой окружности в точке $A$, а второй – в точке $B$. Прямая $AC$ пересекает вторую окружность в точке $D$, отличной от $C$.

а) Докажите, что прямые $BD$ и $AB$ перпендикулярны.

б) Найдите $BC$, если $AC=4{,}5$, а $CD=2$.

**4.** Окружности с центрами $O_1$ и $O_2$ разных радиусов пересекаются в точках $A$ и $B$. Хорда $AC$ большей окружности пересекает меньшую окружность в точке $M$ и делится этой пополам.

а) Докажите, что проекция отрезка $O_1O_2$ на прямую $AC$ в четыре раза меньше $AC$.

б) Найдите $O_1O_2$, если известно, что радиусы окружностей равны 5 и 17, а $AC=16$.

**5.** Две окружности радиусов $R$ и $r$ ($R>r$) касаются внешним образом. Прямая касается этих окружностей в различных точках $A$ и $B$.

а) Докажите, что $AB=2\sqrt{Rr}$.

б) Найдите радиус окружности, касающейся данных окружностей и прямой $AB$, точка касания с прямой $AB$ которой расположена между точками $A$ и $B$.

***Ответы***: **1.** 2. **2.** $\frac{9}{8}$. **3.** 3. **4.** $2\sqrt{85}$. **5.** $\frac{Rr}{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2}$.

## § 3. Многоугольники

Приведем несколько полезных фактов.

- Сумма внутренних углов выпуклого $n$-угольника равна $180°(n-2)$, или $\pi(n-2)$ радиан.
- Площадь любого четырехугольника выражается формулой

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi,$$

где $d_1$ и $d_2$ – диагонали, а $\varphi$ – угол между ними.

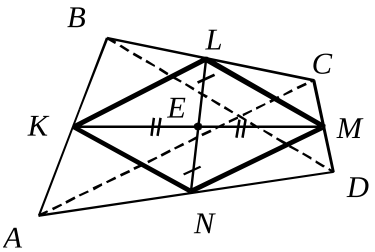



Рис. 31

- (*Теорема Вариньона*). Докажите, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма, площадь которого равна половине площади четырехугольника.
- Отрезки прямых, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника в точке своего пересечения делятся пополам.
- Сумма квадратов диагоналей четырехугольника равна удвоенной сумме квадратов отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.
- Если биссектрисы всех углов многоугольника пересекаются в одной точке $O$, то в него можно вписать окружность. Точка $O$ будет ее центром.

**Методические указания.** В качестве подготовительных задач можно предложить следующие.

*Задачи на доказательство.*

**1.** Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов его противоположных сторон равны.

**2.** Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда проекции их точки пересечения на все стороны лежат на одной окружности.

**3.** Из вершин четырехугольника опущены перпендикуляры на его диагонали. Докажите, что четырехугольник, образованный их основаниями, подобен данному.

**4.** Пусть отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, равны. Докажите, что диагонали этого четырехугольника перпендикулярны.

**5.** Пусть отрезок, соединяющий середины противоположных сторон четырехугольника, делит его на два равновеликих четырехугольника. Докажите, что в этом случае эти стороны параллельны.

*Задачи на вычисление.*

**6.** В четырехугольнике $ABCD$ $AC = 12$, $BD = 16$, $AC \perp BD$. Найдите расстояние между серединами сторон $AB$ и $CD$.

**7.** Диагонали $AC$ и $BD$ четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке $O$, площади треугольников $AOB$ и $AOD$ равны соответственно 12 и 8, $AO:OC = 4:5$. Найдите площадь четырехугольника.

**8.** Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если известны площади треугольников $S_{ABD} = p$, $S_{ACD} = q$, $S_{AED} = r$, где $E$ – точка пересечения диагоналей.

**9.** (**ЕГЭ**, **2005**). В правильном шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ сторона равна $8\sqrt{3}$. Отрезок $BC$ соединяет середины сторон $A_3A_4$ и $A_5A_6$. Найдите длину отрезка, соединяющего середину стороны $A_1A_2$ с серединой отрезка $BC$.

**10.** (**ЕГЭ**, **2003**). Сторона правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна $32\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник $MPK$, если $M$, $P$ и $K$ – середины сторон $AB$, $CD$, $EF$ соответственно.

***Ответы***: **6.** 10. **7.** 45. **8.** $S_{ABD} = p$. **9.** 18. **10.** 24.

Рассмотрим задачу на доказательство и вычисление.

**Пример 21**. *В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ на сторонах $AD$ и $CD$ взяты точки $M$ и $N$ такие, что прямые*

*$CM$ и $AN$ делят $ABCD$ на две фигуры равных площадей.*

а) *Доказать, что $AC \parallel MN$.*

б) *Найти отношение площадей четырехугольников $ABCD$ и $ABCO$, где $O$ – точка пересечения $BD$ и $MN$.*

***Решение***. а) Так как четырехугольники $ABCN$ и $ABCM$ имеют по условию равные площади, а площадь треугольника $ABC$ у них общая, то треугольники $ACN$ и $ACM$ равновелики (см. рис. 32). Поскольку эти треугольники имеют общее основание $AC$, то и высоты, опущенные из вершин $N$ и $M$ на $AC$, равны. Следовательно, точки $N$ и $M$ расположены по одну сторону и на одинаковом расстоянии от прямой $AC$. Значит, $AC \parallel MN$.

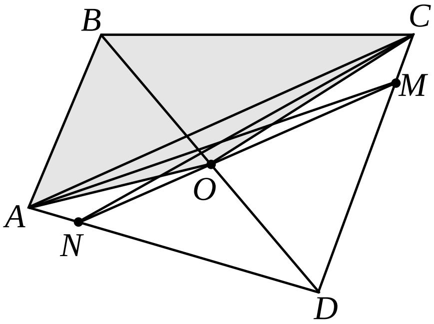


Рис. 32

б) Заметим, что площадь четырехугольника $ABCO$ равна сумме площадей треугольников $ABC$ и $ACO$, причем площадь треугольника $ACO$ не зависит от положения точки $O$ на отрезке $MN$ (основание не меняется, а высота имеет одно и то же значение). Следовательно, площадь треугольника $ACO$ равна площади треугольника $AMC$. Тогда площадь четырехугольника $ABCO$ равна площади четырехугольника $ABCM$ и составляет половину площади четырехугольника $ABCD$, т.е. искомое отношение равно $1:2$.

***Ответ***: $1:2$.

**Пример 22** (**МИОО**, **12.12.13**). *Медианы $AA_1, BB_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $M$. Точки $A_2, B_2$ и $C_2$ – середины отрезков $MA, MB$ и $MC$ соответственно.*

а) *Доказать, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника $ABC$.*

б) *Найти сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.*

***Решение.*** а) Пусть площадь треугольника $ABC$ равна $S$. Так как медианы разбивают его на шесть равновеликих треугольников, то площади треугольников $AC_1M$, $C_1BM$, $MBA_1$, $A_1CM$, $MCB_1$ и $B_1AM$ равны $\frac{S}{6}$ (см. рис. 33).

Медианы точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины, поэтому точки $A_2$, $B_2$, и $C_2$ делят пополам отрезки $AM$, $BM$ и $CM$ соответственно. Тогда площадь треугольника $A_2C_1M$ вдвое меньше площади треугольника $AC_1M$ и равна $\frac{S}{12}$. Аналогично получаем, что площади треугольников $C_1B_2M$, $MB_2A_1$, $A_1C_2M$, $MC_2B_1$ и $B_1A_2M$ равны $\frac{S}{12}$. Тогда площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ равна $6 \cdot \frac{S}{12} = \frac{S}{2}$, т.е. составляет половину площади треугольника $ABC$.

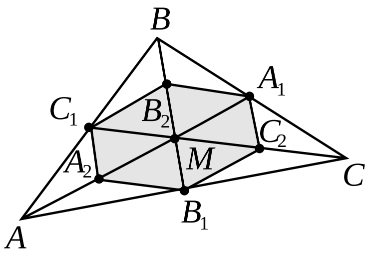


Рис. 33

б) Обозначим длины сторон $BC$, $AC$ и $AB$ треугольника $ABC$ через $a, b, c$. По формуле длины медианы, получаем

$$AA_1^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}, \quad BB_1^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4},$$

$$CC_1^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

Заметим, что

$$C_1A_2 = A_1C_2 = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}BB_1 = \frac{1}{3}BB_1,$$

$$C_1B_2 = B_1C_2 = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{3}AA_1 \text{ и}$$

$B_2A_1 = A_2B_1 = \frac{1}{2}CM = \frac{1}{3}CC_1$ (как средние линии соответствующих треугольников).

Тогда

$$C_1A_2^2 + A_1C_2^2 + C_1B_2^2 + B_1C_2^2 + B_2A_1^2 + A_2B_1^2 =$$

$$= \frac{2}{9}(BB_1^2 + AA_1^2 + CC_1^2) =$$

$$= \frac{2}{9}\cdot\left(\frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2) + \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)\right) = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{63}{2}.$$

***Ответ***: $31{,}5$.

## Задачи для самостоятельного решения

**1.** Диагонали $AC$ и $BD$ выпуклого четырехугольника $ABCD$ делят его на четыре треугольника. Площади трех из них равны 1, 2, 3.

а) Докажите, что выполняется равенство $S_{AOB} \cdot S_{COD} = S_{BOC} \cdot S_{AOD}$.

б) Найдите площадь данного четырехугольника.

**2.** (**МИОО, 19.05.14**). Дан четырёхугольник $ABCD$.

а) Докажите, что отрезки $LN$ и $KM$, соединяющие середины его противоположных сторон, делят друг друга пополам.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если $LM = 3\sqrt{3}$, $KM = 6\sqrt{3}$, $\angle KML = 60°$.

**3.** В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагонали $BE$ и $CE$ являются биссектрисами углов при вершинах $B$ и $C$ соответственно.

а) Докажите, что точка $E$ есть центр вписанной или вневписанной окружности для треугольника $OCB$, где $O$ – точка пересечения прямых $CD$ и $AB$.

б) Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$, если $\angle A = 35°$, $\angle D = 145°$, а площадь треугольника $BCE$ равна 11.

**4.** Каждая сторона треугольника разделена на три части в отношении $m:n:m$.

а) Докажите, что три образовавшиеся треугольника подобны данному треугольнику.

б) Найдите площадь образовавшегося шестиугольника, вершинами которого служат точки деления, если площадь данного треугольника равна 16 и $m:n:m = 1:2:1$.

**5.** В выпуклом четырехугольнике длины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, равны.

а) Докажите, что четырехугольник с вершинами в серединах сторон данного четырехугольника является прямоугольником.

б) Найдите площадь данного четырехугольника, зная, что длины его диагоналей 2 и 4.

***Ответы***: **1.** 7,5 или 12 или $\frac{20}{3}$. **2.** $54\sqrt{3}$. **3.** 22. **4.** 13. **5.** 4.

### *Параллелограмм, прямоугольник, ромб*

*Свойства параллелограмма:*

**1.** Противоположные стороны попарно равны.

**2.** Противоположные углы попарно равны.

**3.** Сумма углов, прилежащих к любой стороне, равна $180°$.

**4.** Диагонали точкой пересечения делятся пополам.

**5.** Точка пересечения диагоналей является центром симметрии.

**6.** Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон.

**7.** Каждая диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.

**8.** Две диагонали делят параллелограмм на четыре равновеликих треугольника.

**9.** Высоты параллелограмма, опущенные из одной вершины, образуют угол, равный углу параллелограмма при соседней вершине.

**10.** Высоты обратно пропорциональны соответственным сторонам.

**11.** Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.

**12.** Биссектрисы смежных углов параллелограмма перпендикулярны, а биссектрисы противоположных углов параллельны или лежат на одной прямой.

**13.** Середина любого отрезка с концами на противоположных сторонах параллелограмма лежит на прямой, проходящей через середины двух других сторон.

*Признаки параллелограмма.*

Четырехугольник является параллелограммом, если:

1) две его стороны равны и параллельны;

2) его противоположные стороны попарно равны;

3) его противоположные углы попарно равны;

4) его диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

*Формулы площади параллелограмма:*

$$S = ah = ab\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1d_2 \cdot \sin\varphi,$$

где $a$ – основание, $h$ – высота; $a$ и $b$ – стороны, а $\alpha$ – угол между ними; $d_1$ и $d_2$ – диагонали, а $\varphi$ – угол между ними.

*Свойства ромба:*

**1.** Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма.

**2.** Диагонали ромба перпендикулярны друг другу.

**3.** Диагонали ромба являются биссектрисами его внутренних углов.

**4.** Диагонали ромба являются его осями симметрии.

**5.** Высоты ромба равны.

**6.** В ромб можно вписать окружность.

*Признаки ромба.* Параллелограмм является ромбом, если выполняется одно из следующих условий:

1) все его стороны равны между собой;

2) его диагонали пересекаются под прямым углом;

3) одна из его диагоналей является биссектрисой его угла.

*Формулы площади ромба:*

$$S = a^2\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1d_2 = ah,$$

где $a$ и $\alpha$ – сторона ромба и угол между сторонами соответственно, $d_1$ и $d_2$ – диагонали, $h$ – высота.

**Методические указания.** В качестве подготовительных задач можно предложить следующие.

*Задачи на доказательство.*

**1.** Докажите, что для произвольной точки $X$ внутри параллелограмма выполняется равенство

$$S_{ABX} + S_{CDX} = S_{BCX} + S_{ADX}.$$

**2.** Докажите, что биссектрисы внутренних углов параллелограмма в пересечении образуют прямоугольник, длины диагоналей которого равны разности неравных сторон параллелограмма.

**3.** Пусть точки $P, Q, R, T$ – середины сторон $AB, BC, CD$ и $DA$ параллелограмма $ABCD$. Докажите, что при пересечении прямых $AQ, BR, CT$ и $DP$ образуется параллелограмм, площадь которого составляет пятую часть площади исходного параллелограмма.

**4.** Докажите, что если каждая из диагоналей четырехугольника делит его площадь пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм.

**5.** Диагонали разбивают четырехугольник на четыре треугольника. Докажите, что если радиусы вписанных в них окружностей равны, то четырехугольник – ромб.

**6.** Докажите, что если четырехугольник диагонали разбивают его на четыре треугольника с равными периметрами, то четырехугольник – ромб.

*Задачи на вычисление.*

**7.** Дан параллелограмм $ABCD$. Биссектрисы его углов $A$ и $D$ делят сторону $BC$ на три равные части. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 40.

**8.** (**ЕГЭ, 2007**). В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла $D$ пересекает сторону $AB$ в точке $K$ и прямую $BC$ в точке $P$. Найдите периметр треугольника $CDP$, если $DK = 18$, $PK = 24$, $AD = 15$.

**9.** Внутри параллелограмма $ABCD$ взята произвольная точка $M$ так, что $S_{ABM} = S_1$, $S_{MCD} = S_2$. Найдите площадь параллелограмма.

**10.** В параллелограмме со сторонами $a$ и $b$ и углом $\alpha$ проведены биссектрисы четырех углов. Найдите площадь четырехугольника, ограниченного биссектрисами.

***Ответ***: **7.** 5; 15 или 8; 12. **8.** 112. **9.** $2(S_1+S_2)$. **10.** $S=\frac{(a-b)^2}{2}\sin\alpha$.

Рассмотрим задачи на доказательство и вычисление.

**Пример 23.** *В параллелограмме* $ABCD$ *биссектриса угла* $A$ *пересекает сторону* $BC$ *в точке* $A_1$*, биссектриса угла* $C$ *пересекает сторону* $AD$ *в точке* $C_1$. $K$ *– точка пересечения* $BC_1$ *и* $AA_1$, $M$ *– точка пересечения* $A_1D$ *и* $CC_1$. *Площадь четырехугольника, ограниченного прямыми* $AA_1$, $CC_1$, $BC_1$ и $A_1D$ *равна* 6, $AB:BC=3:5$.

а) *Доказать, что четырехугольник* $KA_1MC_1$ *– параллелограмм.*

б) *Найти площадь параллелограмма* $ABCD$.

***Решение***. В параллелограмме равны противоположные углы $\angle A=\angle C$ и противоположные стороны $AB=CD$, $AD=BC$ (см. рис. 34). Так как $AA_1$ биссектриса $\angle A$, то $\angle BAA_1=\angle A_1AC$ и $\angle BA_1A=\angle A_1AC$ как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых. Следовательно, треугольник $ABA_1$ равнобедренный, $AB=BA_1$. Соответственно треугольник $DC_1C$ также равнобедренный, $CD=C_1D$. Так как отрезки $BA_1$ и $C_1D$ равны и лежат на параллельных сторонах параллелограмма $ABCD$, то четырехугольник $BA_1DC_1$ – параллелограмм. Аналогично четырехугольник $AA_1CC_1$ – параллелограмм (отрезки $A_1C$ и $AC_1$ равны $A_1C=BC-BA_1=$ $=AD-DC_1=AC_1$ и лежат на параллельных сторонах параллелограмма $ABCD$). Значит, противоположные стороны четырехугольника $KA_1MC_1$ попарно параллельны. Так как отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя другими параллельными прямыми, равны, то в $KA_1MC_1$ противоположные стороны равны и параллельны. Следовательно, он – параллелограмм.

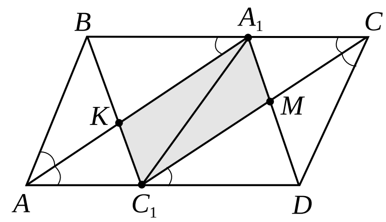



Рис. 34

б) Диагональ $A_1C_1$ параллелограмма $KA_1MC_1$ разбивает его на два треугольника площади 3. Так как по условию $AB:BC=3:5$ и $AB=BA_1$, то $BA_1:A_1C=3:2$. По теореме Фалеса $BK:KC=BA_1:A_1C=3:2$. Отсюда площади треугольников $BKA_1$ и $C_1KA_1$ относятся как $S_{BKA_1}:S_{C_1KA_1}=BK:KC_1=3:2$. Тогда

$$S_{BA_1C_1}=S_{BKA_1}+S_{C_1KA_1}=\frac{3}{2}S_{C_1KA_1}+S_{C_1KA_1}=7{,}5.$$

Так как $S_{BA_1C_1}:S_{C_1A_1C}=BA_1:A_1C=$ $=3:2$, то $S_{C_1A_1C}=\frac{2}{3}S_{BA_1C_1}=5$. Тогда

$$S_{ABCD}=S_{ABC_1}+S_{BA_1C_1}+S_{A_1C_1C}+S_{C_1CD}=$$
$$=2(S_{C_1BA_1}+S_{A_1C_1C})=25.$$

***Ответ***: 25.

**Пример 24.** (**МИОО**, **26.02.2014**, **10 кл.**). *Точка* $M$ *– середина стороны* $AD$ *параллелограмма* $ABCD$. *Из вершины* $A$ *проведены два луча, которые разбивают отрезок* $BM$ *на три равные части.*

а) *Доказать, что один из лучей содержит диагональ параллелограмма.*

б) *Найти площадь четырёхугольника, ограниченного двумя проведенными лучами и прямыми* $BD$ *и* $BC$, *если площадь параллелограмма* $ABCD$ *равна* 40.

***Решение***. а) Пусть $O$ – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, $R$ – точка пересечения отрезка $BM$ с диагональю $AC$ (см. рис. 35). Из подобия треугольников $ARN$ и $CRB$ следует $\frac{MR}{BR}=\frac{AM}{BC}=\frac{1}{2}$. Следовательно, $MR=\frac{1}{3}BM$.

Пусть точка $P$ – середина $BR$. Тогда $BP = PR = RM$. Это означает, что один из лучей, проведенных из вершины $A$ и разбивающих отрезок $BM$ на три равные части, содержит диагональ параллелограмма.

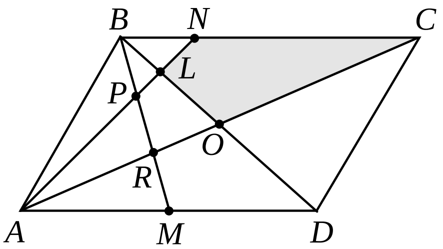


Рис. 35

б) Пусть $L$ – точка пересечения $AN$ и $BD$. Площадь четырехугольника $LNCO$ – искомая. Пусть площадь параллелограмма $ABCD$ равна $S$. Тогда площадь треугольника $BOC$ равна $\frac{S}{4}$. Из подобия треугольников $APM$ и $NPB$ следует $\frac{BN}{AM} = \frac{BP}{PM} = \frac{1}{2}$. Отсюда $BN = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{4}BC$. Из подобия треугольников $DAL$ и $BNL$ следует $\frac{BL}{LD} = \frac{BN}{AD} = \frac{1}{4}$. Отсюда $BL = \frac{1}{4}LD = \frac{1}{5}BD = \frac{2}{5}BO$. Так как

$$\frac{S_{\Delta LBN}}{S_{\Delta BOC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot BN\cdot BL\cdot\sin\angle LBN}{\frac{1}{2}\cdot BC\cdot BO\cdot\sin\angle LBN} =$$

$$= \frac{BN}{BC}\cdot\frac{BL}{BO} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{10}.$$

Отсюда $S_{\Delta LBN} = \frac{S}{40}$. Тогда

$$S_{LNCO} = S_{\Delta BOC} - S_{\Delta LBN} = \frac{S}{4} - \frac{S}{40} =$$

$$= \frac{9}{40}S = \frac{9}{40}\cdot 40 = 9.$$

***Ответ***: 9.

## Задачи для самостоятельного решения

**1** (**МИОО**, **14.11.13**). Биссектриса угла $ADC$ параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую $AB$ в точке $E$. В треугольник $ADE$ вписана окружность, касающаяся стороны $AE$ в точке $K$ и стороны $AD$ в точке $T$.

а) Докажите, что прямые $KT$ и $DE$ параллельны.

б) Найдите угол $BAD$, если известно, что $AD = 8$ и $KT = 4$.

**2** (**МИОО**, **26.02.2014**, **10 кл.**). На сторонах $AD$ и $BC$ параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки $M$ и $N$, причём $M$ – середина $AD$, а $BN : NC = 1:3$.

а) Докажите, что прямые $AN$ и $AC$ делят отрезок $BM$ на три равные части.

б) Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого находятся в точках $C$, $N$ и точках пересечения прямой $BM$ с прямыми $AN$ и $AC$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 48.

**3** (**МИОО**). На сторонах $AB, BC, CD$ и $AD$ параллелограмма $ABCD$ взяты точки $K, L, M$ и $N$ соответственно, причем $\frac{AK}{KB} = \frac{BL}{LC} = \frac{CM}{MD} = \frac{DN}{NA}$.

а) Докажите, что четырехугольник $KLMN$ – параллелограмм, а его центр совпадает с центром параллелограмма $ABCD$.

б) Найдите отношение площадей параллелограммов $KLMN$ и $ABCD$, если известно, что $AK : KB = 3:2$.

**4.** В ромбе $EFQH$ известно, что $\angle FEH = \alpha$. В ромб вписана окружность радиуса $r$. К окружности проведена касательная, пересекающая сторону ромба $FQ$ в точке $A$, а сторону $QH$ в точке $B$.

а) Докажите, что окружность, вписанная в ромб, является вневписанной окружностью треугольника $ABQ$, касающейся стороны $AB$.

б) Найдите длину отрезка $AB$, если площадь отсекаемого треугольника равна $S$.

**5.** На сторонах $AD$ и $DC$ параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки $N$ и $M$. Отрезки $BM$ и $CN$ пересекаются в точке $O$.

а) Докажите подобие треугольников $KNA$ и $CND$, $MOC$ и $BOK$, где $K = CN \cap BA$.

б) Найдите отношение $OM:OB$, если $AN:AD=1:3$, $DM:DC=1:4$.

***Ответ***. **1.** $60°$. **2.** 14. **3.** $13:25$. **4.** $r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\frac{S}{r}$. **5.** $1:2$.

### *Трапеция*

*Свойства трапеции*:

**1.** Сумма углов, прилежащих к боковой стороне, равна 180°.

**2**. Биссектриса угла трапеции, пересекающая второе основание, отсекает от трапеции равнобедренный треугольник.

**3**. Средняя линия трапеции делит любой отрезок с концами, лежащими на прямых, содержащих основания, пополам.

**4**. Диагонали трапеции разбивают ее на четыре треугольника, причем треугольники, прилежащие к основаниям, подобны друг другу, а треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики, т.е. имеют равные площади.

**5**. В любой трапеции следующие четыре точки лежат на одной прямой: середины оснований, точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон.

**6**. Если в трапецию вписана окружность, то отрезки, соединяющие центр окружности с концами боковой стороны трапеции, перпендикулярны.

**7**. Если в трапецию вписана окружность и $m, n, p, q-$ длины отрезков боковых сторон от точек касания до вершин, то для вычисления радиуса вписанной в нее окружности можно использовать формулы: $r=\sqrt{mn}=\sqrt{pq}$.

*Признак трапеции.* Четырехугольник является трапецией, если его параллельные стороны не равны.

*Площадь трапеции* с основаниями $a$ и $b$, высотой $h$ и средней линией $m$ выражается формулой

$$S=\frac{a+b}{2}h=mh.$$

*Задачи на доказательство.*

**1.** Пусть отрезок, соединяющий середины противоположных сторон четырехугольника, делит его на два равновеликих четырехугольника. Докажите, что в этом случае эти стороны параллельны.

**2.** Две окружности пересекаются в точках $A$ и $B$. Через эти точки проведены секущие $MN$ и $KL$. Докажите, что четырехугольник $MNKL$ является трапецией.

**3.** На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$ выбрали произвольную точку $E$. Докажите, что сумма площадей треугольников $BEC$ и $AED$ равна половине площади трапеции.

**4.** Докажите, что прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей трапеции с точкой пересечения продолжений ее боковых сторон, делит основания трапеции пополам.

**5.** Сумма углов при одном из оснований трапеции равна $90°$. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности.

*Задачи на вычисление.*

**6**. Найдите длину отрезка, отсекаемого от прямой параллельной основаниям трапеции и проходящей через точку пересечения диагоналей, Если основания равны $a$ и $b$.

**7.** В трапеции длины оснований равны 5 и 15 *см*, а длины диагоналей – 12 и 16 *см*. Найдите площадь трапеции.

**8.** В трапеции боковые стороны равны 17 и 25 *см*, а основания – 16 и 44 *см*. Найдите площадь трапеции.

**9.** Основания трапеции равны $a$ и $b$. Найдите длину отрезка, параллельного основаниям и делящего площадь трапеции пополам.

**10.** Окружность с центром $O$ описана около трапеции $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$. Найдите площадь трапеции, если ее средняя линия равна 3, $\sin\angle AOB=\frac{3}{5}$ и точка $O$ лежит вне трапеции.

***Ответы***: **6.** $\frac{2ab}{a+b}$. **7.** 96 *см*$^2$. **8.** 450 *см*$^2$. **9.** $\sqrt{(a^2+b^2)/2}$. **10.** 3.

Рассмотрим задачи на доказательство и вычисление.

**Пример 25.** *Трапеция с основаниями вписана в окружность.*

а) *Доказать, что трапеция равнобедренная.*

б) *Найти высоту трапеции, если ее основания равны* 14 *и* 40, *радиус окружность* 25, *а ее центр лежит внутри трапеции.*

***Решение.*** а) Так как основания трапеции параллельны, то равны дуги, заключенные между параллельными прямыми, пересекающими окружность. Соответственно равны хорды, опирающиеся на эти дуги. Следовательно, равны боковые стороны трапеции.

б) Пусть $BC = 14$ – хорда окружности радиуса 25. Существует две хорды, параллельные $BC$ и равные 40 (см. рис. 36). Соответственно, в окружность можно вписать две трапеции с основаниями 14 и 40. Центр $O$ лежит на серединном перпендикуляре к $BC$.

Так как по условию задачи центр $O$ окружности лежит внутри трапеции $ABCD$, то высота $EF = EO + OF$. Из прямоугольного треугольника $AOE$, в котором $AO = 25$, $AE = \frac{AD}{2} = \frac{40}{2} = 20$, получаем

$$EO = \sqrt{AO^2 - AE^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15.$$

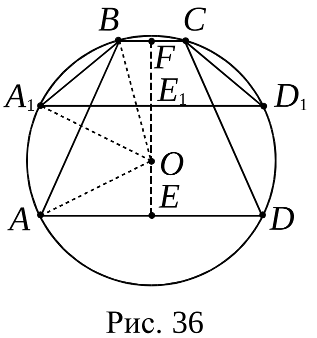



Рис. 36

Из прямоугольного треугольника $BFO$, в котором $BO = 25$, $BF = \frac{BC}{2} = 7$, получаем

$$OF = \sqrt{BO^2 - BF^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24.$$

Тогда $EF = EO + OF = 15 + 24 = 39$.

***Ответ***: 39.

**Пример 26 (МИОО, 22.04.14).** *На диагонали параллелограмма взяли точку, отличную от её середины. Из неё на все стороны параллелограмма* (*или их продолжения*) *опустили перпендикуляры.*

а) *Доказать, что четырёхугольник, образованный основаниями этих перпендикуляров, является трапецией.*

б) *Найти площадь этой трапеции, если площадь параллелограмма равна* 16, *а один из его углов равен* $60°$.

***Решение***. а) Возьмем на диагонали $AC$ параллелограмма $ABCD$ точку $O$ (не посередине) и проведем через нее перпендикуляры $MK$ и $NL$ к сторонам параллелограмма (см. рис. 37). Из подобия прямоугольных треугольников $OMC$

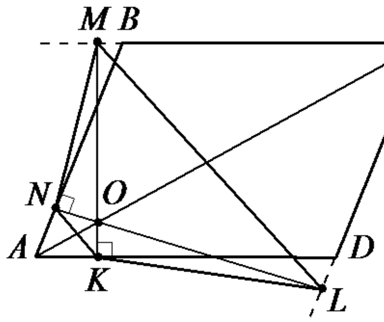



Рис. 37

и $OKA$ следует $\frac{OK}{MO} = \frac{AO}{OC}$, а из подобия прямоугольных треугольников $ANO$ и $CLO$ следует $\frac{NO}{OL} = \frac{AO}{OC}$. Тогда треугольники $KNO$ и $MLO$ также подобны, поскольку $\angle NOK = \angle MOL$ и $\frac{OK}{MO} = \frac{NO}{OL}$. Следовательно, равны накрест лежащие углы $\angle KNO = \angle OLM$, а значит прямые $NK$ и $ML$ параллельны.

Покажем, что четырехугольник $KNML$ – трапеция. Если бы $KNML$ был параллелограммом, то его диагонали точкой пересечения делились бы пополам, т.е. выполнялось бы равенство $MO = OK$. Но в этом случае $AO = OC$, что противоречит условию. Значит $KNML$ – трапеция.

б) Пусть площадь параллелограмма равна $S$, а его острый угол – $\alpha$. Угол между диагоналями $NL$ и $MK$ трапеции $KNML$ равен углу между перпендикулярными им прямыми $AB$ и $AD$, т.е.

также равен $\alpha$. Тогда площадь трапеции равна

$$\frac{1}{2}\cdot NL\cdot MK\cdot\sin\alpha =$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(AD\cdot\sin\alpha)\cdot(AB\cdot\sin\alpha)\cdot\sin\alpha =$$

$$=\frac{(AD\cdot AB\cdot\sin\alpha)\cdot\sin^2\alpha}{2}=\frac{S\cdot\sin^2\alpha}{2}.$$

Так как по условию $S=16$, $\alpha=60°$, то $\frac{16\cdot\sin^2 60°}{2}=6$.

***Ответ***: 6.

## Задачи для самостоятельного решения

**1.** Боковые стороны трапеции лежат на перпендикулярных прямых.

а) Докажите, что четырехугольник с вершинами в серединах диагоналей и в серединах оснований трапеции – прямоугольник.

б) Найдите площадь трапеции, если ее меньшее основание равно 7, а стороны рассмотренного выше прямоугольника равны 6 и 2,5.

**2.** Пусть точки *M* и *N* – середины оснований трапеции, а длина отрезка *MN* равна средней линии трапеции.

а) Докажите, что диагонали перпендикулярны.

б) Найдите площадь рассматриваемой трапеции, если одна из диагоналей равна 12, а $MN=9$.

**3.** Расстояние между серединами *M* и *K* диагоналей *AC* и *BD* соответственно в трапеции *ABCD* равно 5, а ее боковые стороны $AB=6$ и $CD=8$.

а) Докажите, что прямые, содержащие боковые стороны, перпендикулярны.

б) Найдите площадь четырехугольника *MPKQ*, где *P* и *Q* – середины отрезков *BC* и *AD* соответственно.

**4.** В трапеции *ABCD* диагонали *AC* и *BD* пересекаются под прямым углом. Известно, что $\angle BAC=\angle CDB$.

а) Докажите, что около трапеции *ABCD* можно описать окружность.

б) Найдите площадь треугольника *AKD*, если площадь трапеции равна *S*, а продолжения боковых сторон *AB* и *DC* пересекаются в точке *K* под углом $30°$.

**5 (ЕГЭ, 2014).** Одна окружность вписана в прямоугольную трапецию, а вторая касается бóльшей боковой стороны и продолжений оснований.

а) Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно бóльшей боковой стороне трапеции.

б) Найдите расстояние от вершины одного из прямых углов трапеции, до центра второй окружности, если точка касания первой окружности с бóльшей боковой стороной трапеции делит ее на отрезки, равные 5 и 20.

***Ответы:*** **1.** $\frac{810}{13}$. **2.** $36\sqrt{5}$. **3.** 12. **4.** 113. **5.** $5\sqrt{53}$.

### *Вписанный и описанный четырехугольники*

Приведем несколько полезных фактов.

- В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны друг другу.
- Для того чтобы четырехугольник *ABCD* был вписанным необходимо и достаточно выполнения любого из следующих условий:

– сумма двух противоположных углов четырехугольника равна $180°$;

– *ABCD* – выпуклый четырехугольник и $\angle ABD=\angle ACD$.

*Задачи на доказательство.*

**1.** Докажите, что если в четырехугольник можно вписать окружность, то:

а) окружности, вписанные в два треугольника, на которые четырехугольник разбивается диагональю, касаются друг друга;

б) точки касания этих окружностей со сторонами являются вершинами вписанного четырехугольника.

**2.** (*Теорема Ньютона*). Докажите, что если в четырехугольник можно вписать окружность, то ее центр лежит на одной прямой с серединами диагоналей.

**3.** Около окружности с центром *O* описан четырехугольник *ABCD*. Докажите, что справедливо соотношение:

$$\angle AOB+\angle COD=180°.$$

**4.** Докажите, что если во вписанном четырехугольнике одна из диагоналей являются диаметром описанной окружности, то проекции противоположных сторон на другую диагональ равны.

**5.** Докажите, что во вписанном четырехугольнике биссектриса внутреннего угла пересекается с биссектрисой противоположного внешнего угла в точке, лежащей на описанной окружности.

*Задачи на вычисление.*

**6.** Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию с основаниями $a$ и $b$.

**7.** Окружность проходит через вершины $B$, $C$ и $D$ трапеции $ABCD$ и касается стороны $AB$ в точке $B$. Найдите длину диагонали $BD$, если длины оснований трапеции равны $a$ и $b$.

**8.** В ромб с острым углом $30°$ вписан круг, а в круг – квадрат. Найдите отношение площади ромба к площади квадрата.

**9.** Вершины прямоугольника, вписанного в окружность, делят ее на четыре дуги. Найдите расстояние от середины одной из больших дуг до вершин прямоугольника, если стороны его равны 24 и 7 *см*.

**10.** Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Найдите среднюю линию трапеции, если ее большее основание $AD$ равно 15, синус угла $BAC$ равен $\frac{1}{3}$, синус угла $ABD$ равен $\frac{5}{9}$.

***Ответы*: 6.** $\frac{ab}{a+b}$. **7.** $\sqrt{ab}$. **8.** 4. **9.** 15 *см* и 20 *см*. **10.** 12.

**Пример 27. (ФИПИ, 19.01.14).** *В выпуклом четырехугольнике* $ABCD$ *известно,* $AB=2$, $BC=21$, $AD=11$ *и* $CD=18$, $AC=\sqrt{445}$.

а) *Доказать, что около четырехугольника* $ABCD$ *можно описать окружность.*

б) *Найти угол между его диагоналями.*

***Решение.*** Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна $180°$, т.е. $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=180°$ (см. рис. 38).

Поскольку в треугольнике $ACD$ выполняется равенство $AC^2=AD^2+CD^2$, так как $(\sqrt{445})^2=18^2+11^2$ есть верное равенство, то $\angle D=90°$.

Аналогично в треугольнике $ABC$ выполняется равенство $AC^2=AB^2+BC^2$, так как $(\sqrt{445})^2=2^2+21^2$ есть верное равенство, то $\angle B=90°$.

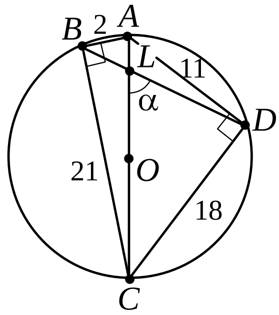



Рис. 38

Следовательно, $\angle B+\angle D=180°$. В выпуклом четырехугольнике сумма углов равна $360°$. Тогда и $\angle A+\angle C=180°$. Значит, четырехугольник $ABCD$ вписанный.

б) Найдем площадь четырехугольника $ABCD$.

$$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC+\frac{1}{2}\cdot AD\cdot CD=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 21+\frac{1}{2}\cdot 11\cdot 18=120.$$

Так как четырехугольник $ABCD$ вписанный, и $\angle B=90°$, то $AC$ – диаметр. Отсюда радиус $R$ окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$, равен $\frac{\sqrt{445}}{2}$.

Из прямоугольных треугольников $ABC$ и $ACD$ находим:

$$\sin\angle BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{21}{\sqrt{445}},$$
$$\cos\angle BAC=\frac{AB}{AC}=\frac{2}{\sqrt{445}},$$
$$\sin\angle CAD=\frac{CD}{AC}=\frac{18}{\sqrt{445}},$$
$$\cos\angle CAD=\frac{CD}{AC}=\frac{11}{\sqrt{445}}.$$

Отсюда

$$\sin\angle BAD = \sin(\angle BAC + \angle CAD) =$$

$$= \frac{21}{\sqrt{445}} \cdot \frac{11}{\sqrt{445}} + \frac{2}{\sqrt{445}} \cdot \frac{18}{\sqrt{445}} = \frac{267}{445} = \frac{3}{5}.$$

Тогда по формуле $BD = 2R\sin\angle BAD$ получаем $BD = 2\cdot\frac{\sqrt{445}}{2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{267}{\sqrt{445}}$.

Из формулы $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot BD\cdot AC\cdot\sin\alpha$, где $\alpha$ – угол между диагоналями, получаем $\sin\alpha = \frac{2S_{ABCD}}{BD\cdot AC} = \frac{240}{\frac{267}{\sqrt{445}}\cdot\sqrt{445}} = \frac{80}{89}$.

***Ответ:*** $\arcsin\frac{80}{89}$.

**Пример 28. (ЕГЭ, 2014).** *Около остроугольного треугольника $ABC$ описана окружность с центром $O$. На продолжении отрезка $AO$ за точку $O$ отмечена точка $K$ так, что $\angle BAC + \angle AKC = 90°$.*

а) *Доказать, что четырехугольник $OBKC$ вписанный.*

б) *Найти радиус окружности, описанной около четырехугольника $OBKC$, если* $\cos\angle BAC = 0{,}6$, а $BC = 48$.

***Решение***. а) Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle OKC = \angle AKC = 90° - \alpha$ и $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha$ (см. рис. 39).

Треугольник $BOC$ равнобедренный, следовательно,

$$\angle OBC = \angle OCB = \frac{180° - 2\alpha}{2} = 90° - \alpha;$$

$$\angle OBC = \angle OKC.$$

Получаем, что точки $O, B, K, C$ лежат на одной окружности. Следовательно, четырехугольник $OBKC$ вписанный.

б) По условию $\cos\angle BAC = 0{,}6$, поэтому $\sin\angle BAC = 0{,}8$.

Радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$, равен

$$OC = \frac{BC}{2\sin\angle BAC} = \frac{48}{2\cdot 0{,}8} = 30.$$

Пусть $R$ – радиус окружности, описанной около четырехугольника $OBKC$. В треугольнике $OCK$ имеем

$$R = \frac{OC}{2\sin\angle OKC} = \frac{OC}{2\sin(90° - \alpha)} =$$

$$= \frac{OC}{2\cos\alpha} = \frac{30}{2\cdot 0{,}6} = 25.$$

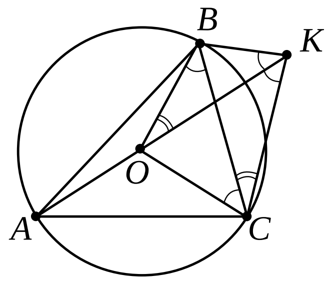



Рис. 39

***Ответ***: 25.

## Задачи для самостоятельного решения

**1.** В окружность вписан четырёхугольник $MNPQ$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке $F$. Прямая, проходящая через точку $F$ и середину стороны $NP$, пересекает сторону $MQ$ в точке $H$.

а) Докажите, что $FH$ – высота треугольника $MFQ$.

б) Найдите длину $FH$, если $PQ = 6$, $NF = 5$, $\angle MNQ = \alpha$.

**2.** (**ФИПИ, 19.01.14**). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, $AB = 7$, $BC = 24$, $AD = 20$ и $CD = 15$, $AC = 25$.

а) Докажите, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

б) Найдите угол между его диагоналями.

**3.** В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность с центром в точке $O$. Через точки $A$, $B$, $C$ и $D$ перпендикулярно $OA$, $OB$, $OC$ и $OD$ проведены прямые $l_a$, $l_b$, $l_c$, $l_d$ соответственно. Прямые $l_a$ и $l_b$ пересекаются в точке $K$, $l_b$ и $l_c$ – в $L$, $l_c$ и $l_d$ – в $M$, $l_d$ и $l_a$ – в $N$.

а) Докажите, что $KM$ и $LN$ пересекаются в точке $O$.

б) Найдите $ON$, если $OK = 4$, $OL = 2$, $OM = 3$.

**4.** (**ЕГЭ, 2014**). В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $BB_1$ и $CC_1$, пересекающиеся в точке $H$.

а) Докажите, что углы $BB_1C_1$ и $BAH$ равны.

б) Найдите расстояние от центра $O$ описанной окружности около треугольника $ABC$ до $BC$, если $B_1C_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ и угол $BAC$ равен $45°$.

**5**. На гипотенузу $AB$ прямоугольного треугольника $ABC$ опустили высоту $CH$. Из точки $H$ на катеты опустили перпендикуляры $HK$ и $HE$.

а) Доказать, что точки $A, B, K$ и $E$ лежат на одной окружности.

б) Найти радиус этой окружности, если $AB = 12$, $CH = 5$.

***Ответы***: **1.** $\sqrt{61\sin^2\alpha - 25}$. **2.** $\arcsin 0{,}8$. **3.** 6. **4.** 1,5. **5.** 6,5.

**Литература:**


**1.** Гордин Р.К. ЕГЭ 2014. Решение задачи С4. – 3-е изд. доп. – М.: МЦНМО, 2014. – 448 с.

**2.** ЕГЭ 2014. Математика. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2(С) / И.Р. Высоцкий, П.И. Захаров, В.С. Панферов, С.Е. Посицельский, А.В. Семенов, А.Л. Семенов, М.А. Семенова, И.Н. Сергеев, В.А. Смирнов, С.А. Шестаков, Д.Э. Шноль, И.В. Ященко; под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2014, 215, [1] с. (Серия «ЕГЭ. 30 вариантов. Типовые тестовые задания»).

**3.** Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Математика. Подготовка к ЕГЭ: решение планиметрических задач (С4). – Ростов-на-Дону, Легион, 2014. – 208 с. – (Готовимся к ЕГЭ.).